

Parallelschakeling

WEGWIJZER

In leereenheid 3 onderzochten we het gedrag van een zuivere gelijkstroomweerstand, een ideale spoel en een ideale condensator aangesloten op een wisselspanningsbron. Dat onderzoek leverde voor elk belastingsgeval een specifieke wet van Ohm op. De ideale componenten (R , L en C) komen in de praktijk echter niet voor. De weerstanden, spoelen en condensatoren die in praktische toepassingen wel voorkomen, kunnen we beschouwen als combinaties van de ideale belastingsgevallen die we in leereenheid 3 bestudeerden.

In een eerste combinatie plaatsten we de zuivere componenten in serie. De verschillende mogelijke schakelingen, uitgaande van de RLC-seriekring, werden in leereenheid 4 uitvoerig besproken.

In leereenheid 5 zullen we het gedrag onderzoeken van een wisselstroomkring die enkele of alle vermelde ideale componenten in parallel bevat. We gaan uit van de RLC-parallelkring om daarna de anders samengestelde parallelschakelingen te bestuderen.

De begeleidende teksten in deze leereenheid laten toe dat de studie van de parallelschakeling aan de studie van de serieschakeling voorafgaat. Dat kan nuttig zijn in het didactisch kader van het projectonderwijs.

Een parallelschakeling bestaat uit verschillende deeltakken. In een parallelkring op gelijkspanning is de geleidbaarheid van de kring gelijk aan de som van de geleidbaarheid van de verschillende deeltakken. In de wisselstroomtheorie noemen we de geleidbaarheid van een kring ook de admittantie. De admittantie is het omgekeerde van de impedantie en is, zoals zal blijken, een handig begrip bij de studie van de parallelschakeling.

We beginnen met de studie van de parallelschakeling van alle enkelvoudige passieve componenten (R , L en C) aangesloten op een wisselspanningsbron, de RLC-parallelkring. In het tijdsdomein leiden we met behulp van het vectorendiagram de formules van de admittantie en de faseverschuiving van de RLC-parallelkring af.

De formules van de admittantie en de faseverschuiving van anders samengestelde parallelkringen bekomen we door de admittantie van de (ontbrekende) componenten in de formules van de RLC-parallelkring gelijk te stellen aan nul.

De complexe rekenwijze bewijst haar praktisch nut bij het oplossen van parallelkringen aangesloten op wisselspanning. In een parallelkring op wisselspanning is de complexe uitdrukking van de vervangingsadmittantie de som van de complexe uitdrukking van de deeladmittanties.

Aan de hand van de resonantiekrommen bespreken we het gedrag van de RLC-parallelkring in het frequentiedomein. Ten slotte besteden we aandacht aan de toepassing in de praktijk.

5.1 Admittantie en faseverschuiving van een RLC-parallelkring

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het begrip admittantie toelichten en het verband met impedantie aantonen.
- de admittantie berekenen uitgaande van de maximale of de effectieve waarde van de stroomsterkte en de spanning.
- het begrip RLC-parallelkring omschrijven.
- het elektrisch schema van een RLC-parallelkring tekenen, de componenten benoemen en de grootheden bronspanning, frequentie, stroomsterkte en deelstromen aanduiden.
- uitgaande van de spanningsvector het vectorendiagram van de RLC-parallelkring opstellen als de kring zich inductief, capacitief of ohms gedraagt.
- uit het vectorendiagram van de RLC-parallelkring de stroomdriehoek afleiden.
- uit de stroomdriehoek van de RLC-parallelkring het verband tussen de effectieve waarde van de deelstromen en de effectieve waarde van de opgenomen stroom afleiden.
- goniometrisch de faseverschuiving van de RLC-parallelkring berekenen uit de stroomdriehoek.
- uit de stroomdriehoek van de RLC-parallelkring de admittantiedriehoek afleiden.
- uit de admittantiedriehoek van de RLC-parallelkring de formule voor het berekenen van de admittantie afleiden.
- uit de admittantiedriehoek van de RLC-parallelkring de formules voor het berekenen van de faseverschuiving afleiden.
- uit de formules van de RLC-parallelkring de formules van de admittantie en de faseverschuiving van een andere parallelkring of een enkelvoudige kring afleiden.

5.1.1 Definities

Een RLC-parallelkring is een parallelschakeling van de enkelvoudige passieve componenten R , L en C . De meest complexe parallelkring aangesloten op wisselstroom kunnen we altijd herleiden tot de parallelschakeling van een zuiver ohmsc, een zuiver inductieve en zuiver capacitieve component, die we kortweg een RLC-parallelkring noemen. Figuur 5.1 stelt het elektrisch schema van een RLC-parallelkring met zijn onderscheiden grootheden voor.

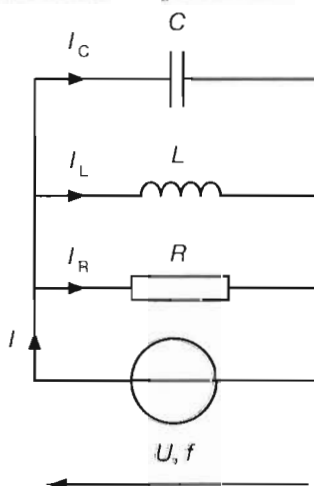


Fig. 5.1 Elektrisch schema van een RLC-parallelkring

In de wisselstroomtheorie noemen we het omgekeerde van de impedantie de admittantie. Admittantie is afgeleid van het Franse werkwoord *admettre*, wat toelaten of binnenlaten betekent. De admittantie kunnen we dan ook zien als de geleidbaarheid van een wisselstroomkring.

De admittantie, voorgesteld door Y , is de verhouding van de stroomsterkte tot de spanning, uitgedrukt in siemens (S , $\frac{1}{\Omega}$ of Ω^{-1}).

$$Y = Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} (S)$$

5.1.2 Opstellen van het vectorendiagram

We veronderstellen dat we de waarde van de componenten (de weerstand R van de gelijkstroomweerstand, de inductiecoëfficiënt L van de ideale spoel en de capaciteit C van de ideale condensator), de frequentie f en de waarde U van de aangelegde spanning kennen. De stroomsterkte I van de bronstroom is onbekend.

Omdat de spanning over alle componenten bij een parallelkring dezelfde is, beginnen we in het vectorendiagram van figuur 5.2 de spanning vanuit de oorsprong O horizontaal en naar rechts (referentiesinus) te tekenen.

De aangelegde spanning staat over de gelijkstroomweerstand. Door de gelijkstroomweerstand vloeit een stroom met stroomsterkte I_R . Als we enkel de gelijkstroomweerstand beschouwen, dan zijn I_R en U de stroomsterkte door en de spanning over een zuiver ohmse weerstand. De stroom I_R is dus niet verschoven t.o.v. de spanning (heeft dezelfde richting en zin als of is in fase met).

De stroomsterkte door de gelijkstroomweerstand berekenen we met $I_R = \frac{U}{R}$.

De aangelegde spanning staat ook over de ideale spoel. Door de spoel vloeit een stroom met stroomsterkte I_L . Als we enkel de ideale spoel beschouwen, dan zijn I_L en U de stroomsterkte door en de spanning over de inductieve reactantie. De stroom I_L ijlt dus 90° of $\pi/2$ rad na op de spanning.

De stroomsterkte door de spoel berekenen we met $I_L = \frac{U}{X_L}$.

De aangelegde spanning staat ook over de ideale condensator. Door de condensator vloeit een stroom met stroomsterkte I_C . Als we enkel de ideale condensator beschouwen, dan zijn I_C en U de stroomsterkte door en de spanning over de capacitieve reactantie. De stroom I_C ijlt dus 90° of $\frac{\pi}{2}$ rad voor op de spanning. De stroomsterkte door de condensator berekenen we met $I_C = \frac{U}{X_C}$.

Nu is bij de parallelschakeling de bronstroom gelijk aan de som van alle deelstromen. Aangezien we de deelstromen vectorieel voorstellen, is de bronstroom de vectoriële som of de resultante van de deelstromen.

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$$

Als we de som moeten maken van verschillende vectoren die niet in fase zijn, gebruiken we de kop-aan-staart-methode of de stangenveelhoek. Hierbij tekenen we alle vectoren, met behoud van hun richting en zin, zodanig dat het beginpunt van de ene vector achtereenvolgens samenvalt met het eindpunt van de voorgaande. De vector die het beginpunt van de eerste vector met het eindpunt van de laatste vector verbindt, is dan de resulterende vector. Ten slotte duiden we de faseverschuiving φ aan met een pijl die begint op de stroomvector en eindigt op de spanningsvector.

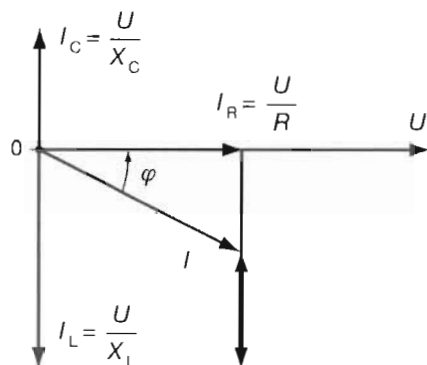


Fig. 5.2 Vectorendiagram van een inductieve RLC-parallelkring

Uit het vectorendiagram (figuur 5.2) blijkt dat de faseverschuiving positief is en de spanning dus voorijlt op de stroom. De faseverschuiving is echter kleiner dan 90° of $\pi/2$ rad, zodat de kring niet zuiver inductief is. We zeggen: de kring gedraagt zich inductief.

Het gedrag van de kring hangt af van de frequentie f van de aangelegde spanning en van de waarden van de componenten (R , L en C). De kring gedraagt zich inductief als

$$I_L > I_C, \text{ als } \frac{U}{X_L} > \frac{U}{X_C}, \text{ dus als } X_C > X_L.$$

Als $X_L > X_C$ dan zal de kring zich capacitief gedragen, want I ligt dan voor op U (figuur 5.3).

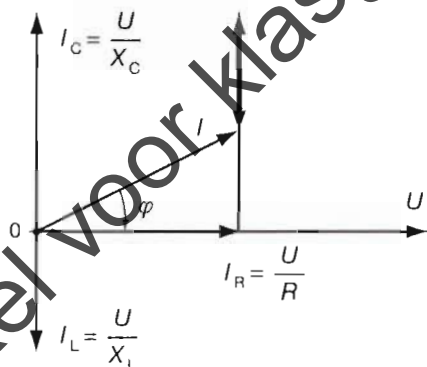


Fig. 5.3 Vectorendiagram van een capacitieve RLC-parallelkring

Als $X_C = X_L$ dan zal de kring zich resistief (ook ohms of zuiver ohms) gedragen, want I is dan niet verschoven tegenover U (figuur 5.4). Hoewel de kring faseverschuivende componenten bevat (de spoel en de condensator), gedraagt hij zich toch als een zuiver ohmse kring. We zeggen: de RLC-parallelkring is in resonantie.

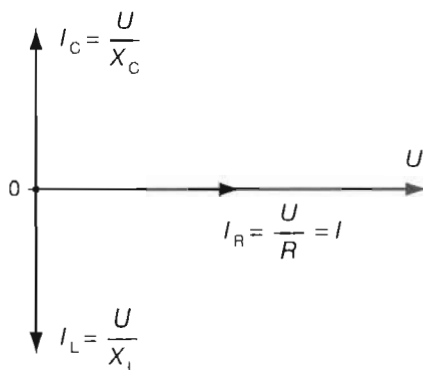


Fig. 5.4 Vectorendiagram van een resistieve RLC-parallelkring

5.1.3 Stroomdriehoek

In het vectorendiagram van figuur 5.2 vormen de stroomvectoren een rechthoekige driehoek (figuur 5.5). De stroom door de gelijkstroomweerstand is de aanliggende zijde van de hoek φ . De overstaande zijde van de hoek φ is het verschil van de stroom door de spoel en de stroom door de condensator. De schuine zijde van de driehoek is de bronstroom. In elke wisselstroomkring is de bronstroom $I = \frac{U}{Z}$. Die rechthoekige driehoek noemen we de stroomdriehoek.

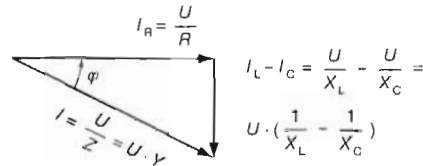


Fig. 5.5 Stroomdriehoek van een inductieve RLC-parallelkring

Met de stelling van Pythagoras tonen we het verband aan tussen de effectieve waarden van de stromen in de RLC-parallelkring.

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

Uit de formule blijkt duidelijk dat je in een RLC-parallelkring de effectieve waarden van de deelstromen niet zonder meer mag optellen om de effectieve waarde van de bronstroom te berekenen.

Uit de stroomdriehoek leiden we goniometrisch de waarde van de faseverschuiving af.

$$\sin \varphi = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{I_L - I_C}{I}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{I_R}{I}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{I_L - I_C}{I_R}$$

5.1.4 Admittantiedriehoek

In de stroomdriehoek van figuur 5.5 is elke zijde evenredig met de spanning U . Als we alle zijden door de waarde U delen, dan ontstaat een nieuwe gelijkvormige of congruente driehoek (figuur 5.6). Het omgekeerde van de weerstandswaarde R van de gelijkstroomweerstand (ook geleidbaarheid of de admittantie van de zuiver ohmse kring, Y_R) is de aanliggende zijde van de faseverschuiving φ . De overstaande zijde van de faseverschuiving φ is het verschil van het omgekeerde van de inductantie X_L van de spoel (ook de admittantie van de zuiver inductieve kring) en het omgekeerde van de capacitantie X_C van de condensator (ook de admittantie van de zuiver capacatieve kring). De schuine zijde is de admittantie Y van de RLC-parallelkring. De rechthoekige driehoek noemen we dan ook de admittantiedriehoek. Soms gebruiken we ook de naam geleidingsdriehoek.

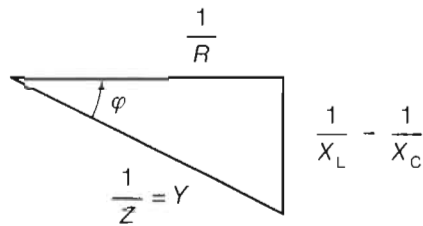


Fig. 5.6 Admittantiedriehoek van de inductieve RLC-parallelkring

Met de stelling van Pythagoras leiden we de formule voor het berekenen van de admittantie van de RLC-parallelkring af uit de admittantiedriehoek.

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left[\frac{1}{R}\right]^2 + \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right]^2} \quad (\text{S})$$

Uit de admittantiedriehoek leiden we goniometrisch de faseverschuiving af

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{Z}} \qquad \cos \varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{R} \qquad \tan \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}}$$

Toelichtingen

Volgorde van L en C

Als je de redenering voor het afleiden van de formules zelf opstelt, zou het kunnen gebeuren dat je de volgorde van de grootheden (de stroom en reactantie) van de spoel en de condensator omwisselt.

Op de formules $I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$ en $Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left[\frac{1}{R}\right]^2 + \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right]^2}$ heeft het omwisselen geen invloed omdat het verschil gekwadeerd wordt.

Het omwisselen heeft bij de formules voor de sinus en de tangens wel een tegengesteld teken tot gevolg.

In de formules moet je altijd de grootte van de condensator aftrekken van de grootte van de spoel, $\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}$ en $I_L - I_C$. Dit zullen we kunnen aantonen als we de complexe rekenwijze toepassen.

De faseverschuivingshoek berekenen uit de goniometrische getallen

Uit de stroomdriehoek en de admittantiedriehoek bepalen we de goniometrische getallen of de goniometrische verhoudingen: sinus, cosinus en tangens van de faseverschuivingshoek φ . De faseverschuivingshoek φ berekenen we met een rekentoestel door de inverse functie van het goniometrisch getal te nemen.

$$\begin{aligned} \varphi &= \sin^{-1}(\sin \varphi) \\ \varphi &= \cos^{-1}(\cos \varphi) \\ \varphi &= \tan^{-1}(\tan \varphi) \end{aligned}$$

Teken of zin van de faseverschuiving

De faseverschuiving in een RLC-parallelkring kan waarden aannemen tussen -90° en $+90^\circ$. Uit de goniometrische cirkel blijkt: van -90° naar $+90^\circ$ verandert de sinus van -1 tot $+1$, de tangens van $-\infty$ tot $+\infty$, maar is de cosinus altijd positief. Om het teken of de zin van de faseverschuiving te bepalen gebruiken we de formule van de sinus of de tangens.

Formules van de admittantie en de faseverschuiving van anders samengestelde parallelschakelingen

We hebben de formules voor de admittantie en de faseverschuiving opgesteld voor de meest uitgebreide parallelschakeling, de RLC-parallelkring. De andere parallelkringen en de enkelvoudige kringen bekomen we door een of meerdere componenten in de RLC-parallelkring niet te gebruiken. In het schema van de RLC-parallelkring betekent dit dat we de componenten die we niet gebruiken, uit de kring verwijderen. De formules voor de admittantie en de faseverschuiving in de gewenste kring bekomen we door de admittantie van de niet gebruikte componenten in de formules van de RLC-parallelkring gelijk te stellen aan nul.

Toegepast op de zuiver capacatieve kring geeft dat het volgende.

Een zuiver capacatieve kring is een RLC-parallelkring waarin de gelijkstroomweerstand en de ideale spoel niet voorkomen ($\frac{1}{R} = 0$ en $\frac{1}{X_L} = 0$).

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left[\frac{1}{R}\right]^2 + \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right]^2} = \sqrt{0^2 + \left[0 - \frac{1}{X_C}\right]^2} = \sqrt{\left[-\frac{1}{X_C}\right]^2} = \frac{1}{X_C} \text{ (S) of } Z = X_C$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{Z}} = \frac{0 - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{X_C}} = -1$$

zodat

$$\varphi = \sin^{-1}(\sin \varphi) = \sin^{-1}(-1) = -90^\circ \text{ of } -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}} = \frac{0 - \frac{1}{X_C}}{0} = -\infty$$

zodat

$$\varphi = \tan^{-1}(\tan \varphi) = \tan^{-1}(-\infty) = -90^\circ \text{ of } -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Uit de formules van de sinus en de tangens kunnen we afleiden dat de bronstroom in een zuiver capacatieve kring 90° of $\pi/2$ rad voorijlt op de aangelegde spanning.

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z} - \frac{1}{X_C}} = \frac{0}{\frac{1}{Z} - \frac{1}{X_C}} = 0 \text{ zodat } \varphi = \cos^{-1}(\cos \varphi) = \cos^{-1}(0) = +/ - 90^\circ \text{ of } +/ - \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Uit de formule van de cosinus kunnen we wel afleiden dat de aangelegde spanning en de bronstroom in een zuiver capacatieve kring 90° of $\pi/2$ rad verschoven zijn, maar niet welke grootte voorijlt op de andere.

5.2 Berekenen van een RLC-parallelkring met de complexe rekenwijze

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de admittantie voor een wisselstroomkring schrijven in haar complexe vorm.
- met behulp van de complexe rekenwijze de grootte en de hoek van alle vectoren in het vectorendiagram van een RLC-parallelkring berekenen.
- op het vectorendiagram van een RLC-parallelkring aantonen dat de bronstroom de vectoriële som van de deelstromen is.
- de faseverschuiving in een wisselstroomkring aanduiden op het vectorendiagram en de faseverschuivingshoek bepalen uit de fase van de aangelegde spanning en de bronstroom.

De complexe vorm van de admittantie is de verhouding van het complex getal dat de stroom voorstelt tot het complex getal dat de spanning voorstelt.

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}}$$

We passen de complexe rekenwijze toe op een rekenvoorbeeld.

We sluiten de parallelschakeling van een gelijkstroomweerstand met een weerstandswaarde van $24,0 \, \Omega$, een ideale spoel met een inductiecoëfficiënt van $95,5 \, \text{mH}$ en een ideale condensator met een capaciteit van $53,1 \, \mu\text{F}$ aan op een sinusvormige wisselspanning van $120,0 \, \text{V}$ met een frequentie van $50,0 \, \text{Hz}$.

Gegeven: $U = 120,0 \, \text{V}$
 $f = 50,0 \, \text{Hz}$
 $R = 24,0 \, \Omega$
 $L = 95,5 \, \text{mH}$
 $C = 53,1 \, \mu\text{F}$

Gevraagd: – Bereken alle spanningen en stromen in de kring en stel ze voor in een vectorendiagram.
– Toon complex en vectorieel aan dat de bronstroom gelijk is aan de som van de deelstromen.
– Bereken de faseverschuiving en duid ze aan op het vectorendiagram.

Oplossing: We berekenen eerst de complexe voorstelling van de admittantie van de passieve componenten.

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{\bar{Z}_R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{24,0} \, \text{S} = 41,7 \cdot 10^{-3} + j0 \, (\text{S})$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_L &= \frac{1}{\bar{Z}_L} = \frac{1}{j \cdot X_L} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} = \frac{j}{j \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} = \frac{-j}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,0955 \cdot 10^{-3}} \\ &= 0 - j33,33 \cdot 10^{-3} \, (\text{S}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_C &= \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{-j \cdot X_C} = \frac{1}{-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{j}{j \cdot (-j) \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}} = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,531 \cdot 10^{-6} \\ &= 0 + j16,81 \cdot 10^{-3} \, (\text{S}) \end{aligned}$$

We leerden dat, in een parallelkring op gelijkspanning, het omgekeerde van de vervangingsweerstand de som van het omgekeerde van de deelweerstand is.

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

(We kunnen dit ook lezen als: de geleidbaarheid van de kring is de som van de deelgeleidbaarheden.)

In een parallelkring op wisselspanning stellen we nu vast dat de complexe uitdrukking van de vervangingsadmittantie de som is van de complexe uitdrukking van de deeladmittanties.

$$\bar{Y} = \bar{Y}_R + \bar{Y}_L + \bar{Y}_C = 41,7 \cdot 10^{-3} - j33,3 \cdot 10^{-3} + j16,81 \cdot 10^{-3} = 41,7 \cdot 10^{-3} - j16,49 \cdot 10^{-3} \text{ (S)}$$

In de opgave is de spanning gegeven: $U = 120,0 \text{ V}$. We beginnen het vectorendiagram met de spanning en tekenen die in de referentiestand (horizontaal en naar rechts gericht) vanuit de oorsprong o. De spanning kunnen we voorstellen door een zuiver reëel complex getal.

$$\bar{U} = 120,0 + j0 \text{ (V)}$$

De stroom berekenen we uit de spanning en de vervangingsadmittantie.

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \bar{U} \cdot \bar{Y} = (120,0 + j0) \cdot (41,7 \cdot 10^{-3} - j16,49 \cdot 10^{-3})$$

Dit kan je wiskundig oplossen door distributiviteit toe te passen. De complexe rekenwijze is echter maar efficiënt toe te passen als je beschikt over een tool waarmee je complex kan rekenen (een rekenblad op de PC of een 'grafisch' rekentoestel).

$$\bar{I} = 5,00 - j1,979$$

De lengte van de stroomvector is de modulus van het complex getal.

$$I = \sqrt{5,00^2 + (-1,979)^2} = 5,38 \text{ A}$$

De hoek waaronder we de vector moeten tekenen is het argument van het complex getal.

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-1,979}{5,00}\right) = -21,6^\circ$$

Dit kunnen we ook bekomen door het rekentoestel de poolcoördinaten of de exponentiële vorm van het complex getal te laten tonen.

Vervolgens berekenen we de complexe uitdrukkingen van de deelstromen.

$$\bar{I}_R = \bar{U} \cdot \bar{Y}_R = 120,0 \cdot (41,7 \cdot 10^{-3} + j0) = 5,00 + j0$$

$$I_R = 5,00 \text{ A en } \alpha_{I_R} = 0^\circ$$

$$\bar{I}_L = \bar{U} \cdot \bar{Y}_L = 120,0 \cdot (0 - j33,3 \cdot 10^{-3}) = 0 - j4,00$$

$$I_L = 4,00 \text{ A en } \alpha_{I_L} = -90^\circ$$

$$\bar{I}_C = \bar{U} \cdot \bar{Y}_C = 12,00 \cdot (0 + j16,81 \cdot 10^{-3}) = 0 + j2,02$$

$$I_C = 2,02 \text{ A en } \alpha_{I_C} = +90^\circ$$

Ter controle berekenen we de som van de complexe deelstromen.

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = (5,00 + j0) + (0 - j4,00) + (0 + j2,02) = 5,00 - j1,980$$

$$I = 5,38 \text{ A en } \alpha_I = -21,6^\circ$$

Op het vectorendiagram construeren we de resultante van de drie deelstromen met een stangenveelhoek.

Ten slotte duiden we de faseverschuiving aan op het vectorendiagram.

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = 0 - (-21,6) = 21,6^\circ$$

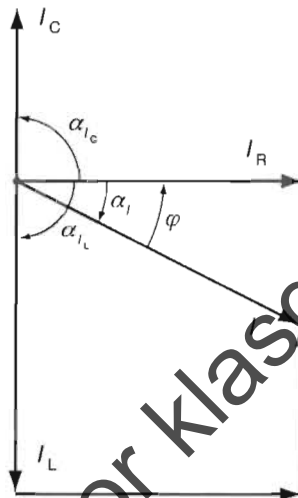


Fig. 5.7 Vectorendiagram bij de complexe berekening van de RLC-parallelkring

Het vectorendiagram van figuur 5.7 komt overeen met het vectorendiagram van figuur 5.2.

Toelichting

Admittantie, conductantie en susceptantie

De complexe vorm van de admittantie van een RLC-parallelkring is de som van de complexe vormen van de admittantie van de componenten.

$$\bar{Y} = \bar{Y}_R + \bar{Y}_L + \bar{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L} + j\frac{1}{X_C} = \frac{1}{R} - j\left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right]$$

Het reële deel van de complexe vorm van de admittantie is het omgekeerde van de weerstand. We noemen het soms de conductantie van de kring. De conductantie stellen we voor door G en drukken we uit in siemens.

Het imaginaire deel van de complexe vorm van de admittantie is het verschil van het omgekeerde van de inductieve reactantie en het omgekeerde van de capacatieve reactantie.

Dit verschil noemen we soms de susceptantie van de kring. De susceptantie stellen we voor door B en drukken we uit in siemens. De complexe voorstelling van de admittantie wordt dan:

$$\bar{Z} = G \pm j.B$$



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het vectorendiagram en het frequentiegedrag van de RLC-parallelkring.

5.3 Resonantiekrommen van de RLC-parallelkring

Leerdoelen

Hierna kan je:

- aan de hand van een berekeningsvoorbeeld de resonantiekrommen $Z = f(f)$, $I = f(f)$, $\varphi = f(f)$, $X_L = f(f)$ en $X_C = f(f)$ tekenen en het verloop t.o.v. elkaar toelichten.
- de resonantiekrommen $Z = f(f)$, $I = f(f)$ en $\varphi = f(f)$ tekenen voor een kring met dezelfde L en C , maar met een grotere weerstandswaarde R en uit die krommen de invloed van R toelichten.
- het begrip selectiviteit verklaren.
- de begrippen bandbreedte en +3 dB-punten van een RLC-parallelkring definiëren.
- de bandbreedte van een RLC-parallelkring berekenen en grafisch bepalen in een stroomsterkte-frequentie-diagram.
- de invloed van de weerstand op de selectiviteit en de bandbreedte toelichten.
- het begrip overspanningsfactor of kwaliteitsfactor definiëren en de waarde voor een willekeurige wisselstroomkring bepalen.
- het frequentiegedrag van een LC-parallelkring afleiden uit de RLC-parallelkring.

5.3.1 Berekeningsvoorbeeld

In tabel 5.1 geven we de resultaten weer van de impedantie en de stroomsterkte van de RLC-parallelkring van figuur 5.8. We berekenen voor een toenemende frequentie per 5 Hz, de impedantie en de stroomsterkte voor de frequenties tussen 0 en 120 Hz, een eerste maal met een weerstand van $20\ \Omega$ en een tweede maal met een weerstand van $40\ \Omega$.

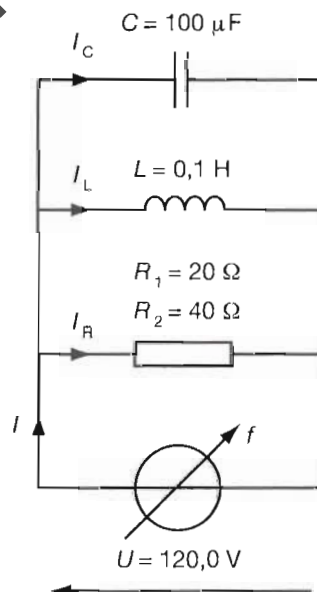


Fig. 5.8 Elektrisch schema voor het berekenen van de resonantiekrommen

f (Hz)	ω (rad/s)	X_L (Ω)	X_C (Ω)	Z_1 (Ω)	Z_2 (Ω)	I_1 (A)	I_2 (A)	φ_1 ($^\circ$)	φ_2 ($^\circ$)
0	0,000	0,000	∞	0,000	0,000	∞	∞	90,0	90,0
5	31,416	3,142	318,309	3,134	3,163	38,29	37,94	81,0	85,5
10	62,832	6,283	159,155	6,217	6,456	19,30	18,59	71,9	80,7
15	94,248	9,425	106,103	9,188	10,014	13,06	11,98	62,7	75,5
20	125,664	12,566	79,577	11,960	13,982	10,03	8,58	53,3	69,5
25	157,080	15,708	63,662	14,434	18,491	8,31	6,49	43,8	62,5
30	188,496	18,850	53,052	16,507	23,605	7,27	5,08	34,4	53,8
35	219,911	21,991	45,473	18,103	29,156	6,63	4,12	25,2	43,2
40	251,327	25,133	39,789	19,192	34,507	6,25	3,48	16,3	30,4
45	282,743	28,274	35,368	19,802	38,481	6,06	3,12	8,1	15,8
50	314,159	31,416	31,831	19,999	39,994	6,00	3,00	0,5	1,0
55	345,575	34,558	28,937	19,875	39,026	6,04	3,07	-6,4	-12,7
60	376,991	37,699	26,526	19,519	36,519	6,15	3,29	-12,6	-24,1
65	408,407	40,841	24,485	19,009	33,473	6,31	3,68	-18,1	-33,2
70	439,823	43,982	22,736	18,407	30,480	6,52	3,94	-23,0	-40,4
75	471,239	47,124	21,221	17,758	27,778	6,76	4,32	-27,4	-46,0
80	502,655	50,266	19,894	17,094	25,421	7,02	4,72	-31,3	-50,5
85	534,071	53,407	18,724	16,433	23,390	7,30	5,13	-34,7	-54,2
90	565,487	56,549	17,684	15,791	21,648	7,60	5,55	-37,9	-57,2
95	596,903	59,690	16,753	15,173	20,127	7,91	5,96	-40,7	-59,8
100	628,319	62,832	15,915	14,585	18,811	8,23	6,38	-43,2	-61,9
105	659,734	65,973	15,158	14,027	17,658	8,55	6,80	-45,5	-63,8
110	691,150	69,115	14,469	13,501	16,641	8,89	7,21	-47,5	-65,4
115	722,566	72,257	13,840	13,005	15,738	9,23	7,63	-49,4	-66,8
120	753,982	75,398	13,263	12,538	14,931	9,57	8,04	-51,2	-68,1

Tabel 5.1 Berekeningen bij de resonantiekrommen

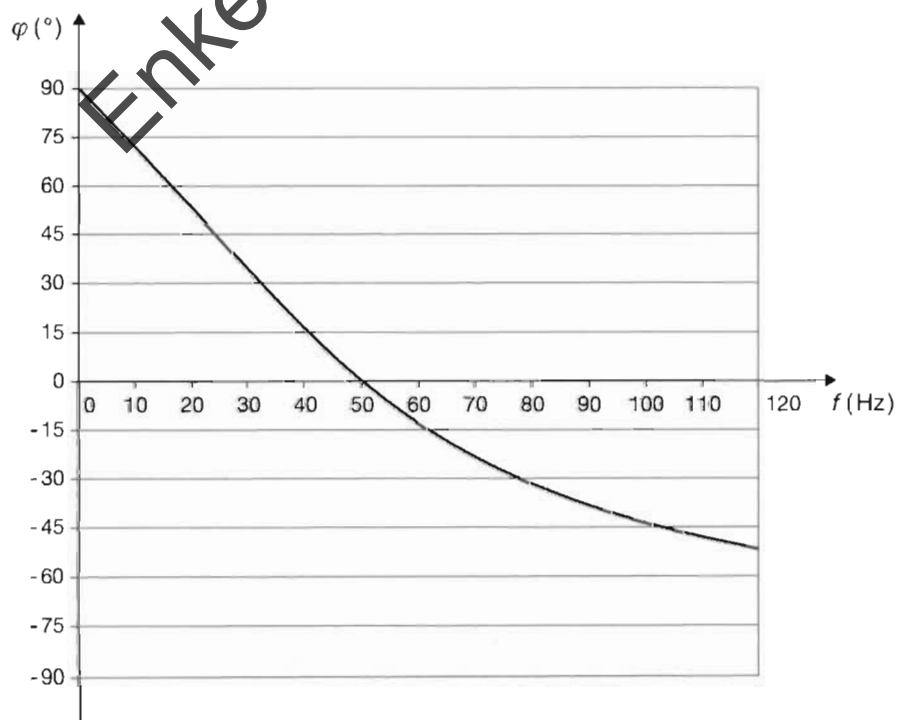
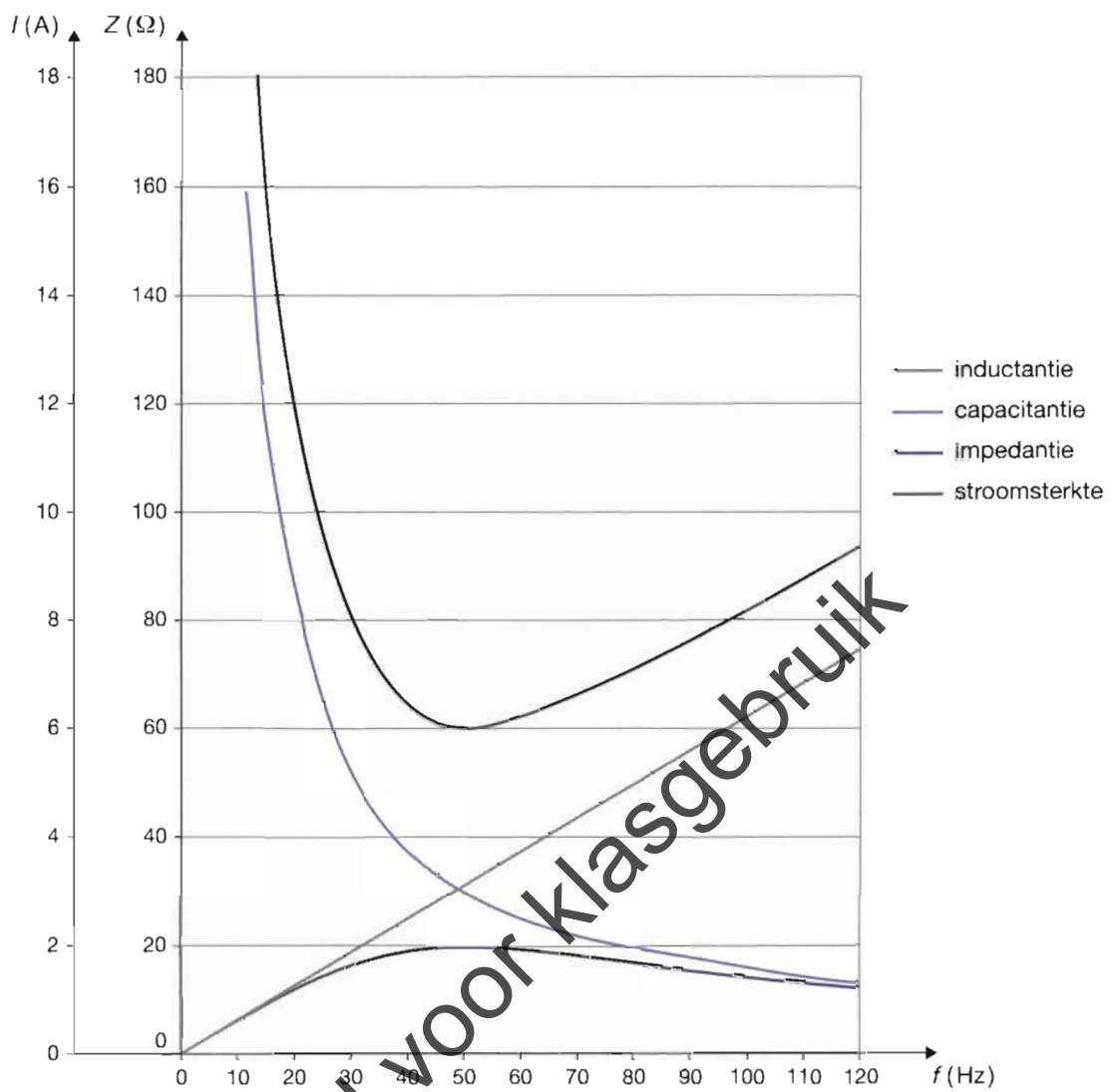


Fig. 5.9 De resonantiekrommen van een RLC-parallelkring

5.3.2 Bespreking van figuren 5.9 en 5.10

a Impedantie-(stroomsterkte)-frequentie-diagram

In het berekeningsvoorbeeld beschouwen we een RLC-parallelkring waarvan de aangelegde spanning, de frequentie en de waarden van de componenten gekend zijn. In deze paragraaf bestuderen we de RLC-parallelkring in het frequentiedomein. We onderzoeken welke invloed de frequentie heeft op de impedantie van de componenten, de totale impedantie, de stroomsterkte en de faseverschuiving. We stellen de verschillende grootheden voor in een impedantie- of stroomsterkte-frequentie-diagram.

b Inductantie en capacitantie

De weerstandswaarde R van de gelijkstroomweerstand is onafhankelijk van de frequentie en kunnen we in een impedantie-frequentie-diagram voorstellen als een horizontale rechte boven de X-as.

De inductantie van de ideale spoel is evenredig met de frequentie. In een impedantie-frequentie-diagram is de vergelijking $X_L = 2\pi fL$ van de vorm $y = a \cdot x$ en is de grafiek van de inductantie een stijgende rechte door de oorsprong.

De capacitantie van de ideale condensator is omgekeerd evenredig met de frequentie. Als de frequentie van de aangelegde spanning nul is, d.i. als we de condensator aansluiten op een constante gelijkspanning, wordt de capacitantie oneindig groot. In een impedantie-frequentie-diagram is de

vergelijking $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ van de vorm $y = \frac{a}{x}$ en is de grafiek van de capacitantie een hyperbool.

c Resonantiefrequentie

Op het snijpunt van de grafieken van de inductantie en de capacitantie is $X_L = X_C$, zodat de RLC-parallelkring in resonantie is. Dit gebeurt bij één frequentie die we de resonantiefrequentie noemen en voorstellen door f_r . De formule voor het berekenen van de resonantiefrequentie leiden we af uit de voorwaarde:

$$X_{Lr} = X_{Cr}$$

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

$$\text{waaruit volgt } f_r = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{Hz})$$

$$\text{toegepast op het berekeningsvoorbeeld: } f_r = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{0,1 \times 100 \cdot 10^{-6}}} = 50,3 \text{ Hz}$$

Uit de formule blijkt dat de resonantiefrequentie enkel afhangt van de inductiecoëfficiënt en de capaciteit. De weerstandswaarde beïnvloedt de resonantiefrequentie niet.

d Frequentiegedrag

Als de frequentie van de aangelegde spanning gelijk is aan de resonantiefrequentie, gedraagt de RLC-parallelkring zich als een zuiver ohmse kring. De impedantie is gelijk aan de weerstandswaarde van de gelijkstroomweerstand ($Z = R = 20 \Omega$). Op de resonantiefrequentie is de impedantie maximaal en de stroomsterkte minimaal. De faseverschuiving is 0, zodat de aangelegde spanning in fase is met de bronstroom.

In een parallelschakeling is de vervangingsimpedantie altijd kleiner dan de impedantie van de deeltak met de kleinste impedantie.

Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie is de inductantie kleiner dan de capacitantie (de grafiek van de impedantie volgt ongeveer de grafiek van de inductantie). De faseverschuiving is positief, zodat de aangelegde spanning voorijlt op de bronstroom. Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie gedraagt de RLC-parallelkring zich inductief.

Voor frequenties hoger dan de resonantiefrequentie is de capacitantie kleiner dan de inductantie (de grafiek van de impedantie volgt ongeveer de grafiek van de capacitantie). De faseverschuiving is negatief, zodat de aangelegde spanning najlt op de bronstroom. Voor frequenties hoger dan de resonantiefrequentie gedraagt de RLC-parallelkring zich capacitief.

e Selectiviteit

Op de resonantiefrequentie is de impedantie van de kring maximaal en de stroomsterkte minimaal. Bij frequenties die afwijken van de resonantiefrequentie is de impedantie kleiner en de stroomsterkte groter. We kunnen dat ook als volgt uitdrukken: de frequenties die van de resonantiefrequentie afwijken, worden beter doorgelaten. We beschikken met de RLC-parallelkring over een selectiemiddel dat de stroomsterkte met frequentie f_r zal dempen terwijl de andere frequenties een kleine weerstand ondervinden en hierdoor beter doorgelaten worden. Naarmate de grafiek van de stroomsterkte steiler verloopt in de omgeving van de resonantiefrequentie, zal ook de selectiviteit van de kring groter zijn.

In figuur 5.10 stellen we vast dat bij $R_1 = 40 \Omega$ de grafiek van de stroomsterkte steiler verloopt dan bij $R_1 = 20 \Omega$. De grootste gelijkstroomweerstand geeft de grootste selectiviteit. Als we de spoel of de condensator in een RLC-parallelkring regelbaar maken, dan kunnen we de resonantiefrequentie veranderen, waardoor de stroom met een andere frequentie zullen worden doorgelaten.

f Bandbreedte

De bandbreedte B is het verschil van twee frequenties f_1 en f_2 .

$$B = f_2 - f_1 \text{ (Hz)}$$

Bij de RLC-parallelkring is het vermogen dat gedissipeerd wordt in de weerstand bij f_1 en bij f_2 het dubbele van het vermogen dat in de weerstand gedissipeerd wordt bij de resonantiefrequentie.

$$\frac{P_{R1,2}}{P_{Rr}} = 2$$

In de audioteknik worden versterkingen en verzwakkingen uitgedrukt in decibel. Om een verhouding uit te drukken in decibel nemen we eerst de 10-delige logaritme van de breuk en vermenigvuldigen die dan met 10, omdat een deci-bel een tiende van de eenheid bel voorstelt. De bel is een dimensieloze eenheid die afgeleid is van de naam van de uitvinder van de telefonie Graham Bell. De bel zelf wordt als eenheid niet gebruikt.

$$10 \cdot \log \frac{P_{R1,2}}{P_{Rr}} = 10 \cdot \log 2 = +3 \text{ (dB)}$$

De frequenties f_1 en f_2 noemen we de +3 dB-punten van de grafiek van de stroomsterkte in het stroomsterkte-frequentie-diagram. Het plusteken duidt op een versterking. Voor een verzwakking gebruiken we een minteken.

Het vermogen in de weerstand kunnen we ook berekenen zoals bij gelijkstroom.

$$P_R = U_R \cdot I = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R$$

Bij de +3 dB-punten wordt de formule dan:

$$10 \cdot \log \frac{P_{R1,2}}{P_R} = 10 \cdot \log \frac{I_{1,2}^2 \cdot R}{I_r^2 \cdot R} = 10 \cdot \log \left(\frac{I_{1,2}}{I_r} \right)^2 = 20 \cdot \log \left(\frac{I_{1,2}}{I_r} \right) = +3 \text{ (dB)}$$

Uit de laatste gelijkheid bepalen we de stroomverhouding:

$$\log \left(\frac{I_{1,2}}{I_r} \right) = \frac{3}{20} \text{ (dB)}$$

$$10^{\log(I_{1,2}/I_r)} = 10^{3/20}$$

$$\frac{I_{1,2}}{I_r} = 10^{3/20} = 1,41 \text{ of } I_{1,2} = 1,41 \cdot I_r$$

Voor een RLC-parallelkring zijn de +3 dB-punten de frequenties waarvoor de stroomsterkte 141 % is van de stroomsterkte bij resonantie.

De resonantiefrequentie is ook het meetkundig gemiddelde of het middenevenredige van de +3 dB-punten.

Om de resultaten te controleren, kunnen we de resonantiefrequentie nog narekenen met deze formule: $f_r = \sqrt{f_1 f_2}$



Op de cd-rom vind je de wiskundige berekening van de +3 dB-punten en de bandbreedte van de RLC-parallelkring.

Uit figuur 5.10 blijkt dat de RLC-parallelkring de stroomsterkten binnen de bandbreedte veel slechter doorlaat dan een butten. In de audiotechniek noemen we een frequentieselectieve schakeling ook een filter. De RLC-parallelkring is een voorbeeld van een bandspfilter.

Uit figuur 5.10 blijkt dat de faseverschuivingshoek bij de +3 dB-punten in absolute waarde 45° is. Bij de +3 dB-punten wordt $\left| \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right| = \frac{1}{R}$ en is de admittantiedriehoek een gelijkbenige driehoek.

g Invloed van de weerstand

Uit figuur 5.10 blijkt dat de bandbreedte afneemt als de weerstand toeneemt. Als we in het rekenvoorbeeld de weerstandswaarde verhogen van $R_1 = 20 \Omega$ naar $R_2 = 40 \Omega$, dan zal de bandbreedte afnemen van $B_1 = 79,6 \text{ Hz}$ naar $B_2 = 39,8 \text{ Hz}$. Naarmate de weerstandswaarde groter wordt, wordt de kring selectiever, zodat de kring minder gedempt wordt door de weerstand.

In een ideale parallelresonantiekring komt geen weerstand voor; de RLC-parallelkring wordt dan een LC-parallelkring. De bandbreedte van een LC-parallelkring is minimaal, zodat hij slechts de stroom met een enkele frequentie, de resonantiefrequentie perfect ($Z_r = R = \infty$) zal sperren en alle andere frequenties zal doorlaten.

h Overstroomfactor of kwaliteitsfactor Q

Bij resonantie is de stroomsterkte van de stroom door de gelijkstroomweerstand gelijk aan de stroomsterkte van de bronstroom. Dit houdt echter niet in dat door de spoel en de condensator geen stroom zou vloeien. De stromen door de spoel en de condensator zijn in tegenfase en heffen elkaar op terwijl hun absolute waarde zelfs hoger kan zijn dan de stroomsterkte van de bronstroom. De overstroom- of kwaliteitsfactor Q is de verhouding van de stroomsterkte van de stroom door de spoel of de condensator bij resonantie tot de stroomsterkte van de bronstroom bij resonantie.

$$Q = \frac{I_{Lr}}{I_r} = \frac{I_{Cr}}{I_r}$$

Door toepassing van de wet van Ohm wordt dit:

$$Q = \frac{\frac{U}{X_{Lr}}}{\frac{U}{R}} = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot L}$$

en

$$Q = \frac{\frac{U}{X_{Cr}}}{\frac{U}{R}} = 2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot R \cdot C$$

Toegepast op het rekenvoorbeeld wordt dit:

– met $R_1 = 20 \, \Omega$

$$Q_1 = \frac{20}{2 \cdot \pi \cdot 50,3 \cdot 3,0,1} = 0,633 \text{ of } Q_1 = 2 \cdot \pi \cdot 50,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,632$$

– met $R_2 = 40 \, \Omega$ is $Q_2 = 1,26$

Uit de formules blijkt dat de kwaliteitsfactor rechtevenredig is met de weerstand. In de LC-parallelkring, waarin $R \rightarrow \infty$, wordt $Q = \infty$.

De kwaliteitsfactor is ook gelijk aan de verhouding van de resonantiefrequentie tot de bandbreedte:

$$Q = \frac{f_r}{B}$$

Toegepast op het rekenvoorbeeld wordt dit:

– met $R_1 = 20 \, \Omega$

$$Q_1 = \frac{f_r}{B_1} = \frac{50,3}{79,6} = 0,632$$

– met $R_2 = 40 \, \Omega$

$$Q_2 = \frac{f_r}{B_2} = \frac{50,3}{39,8} = 1,26$$

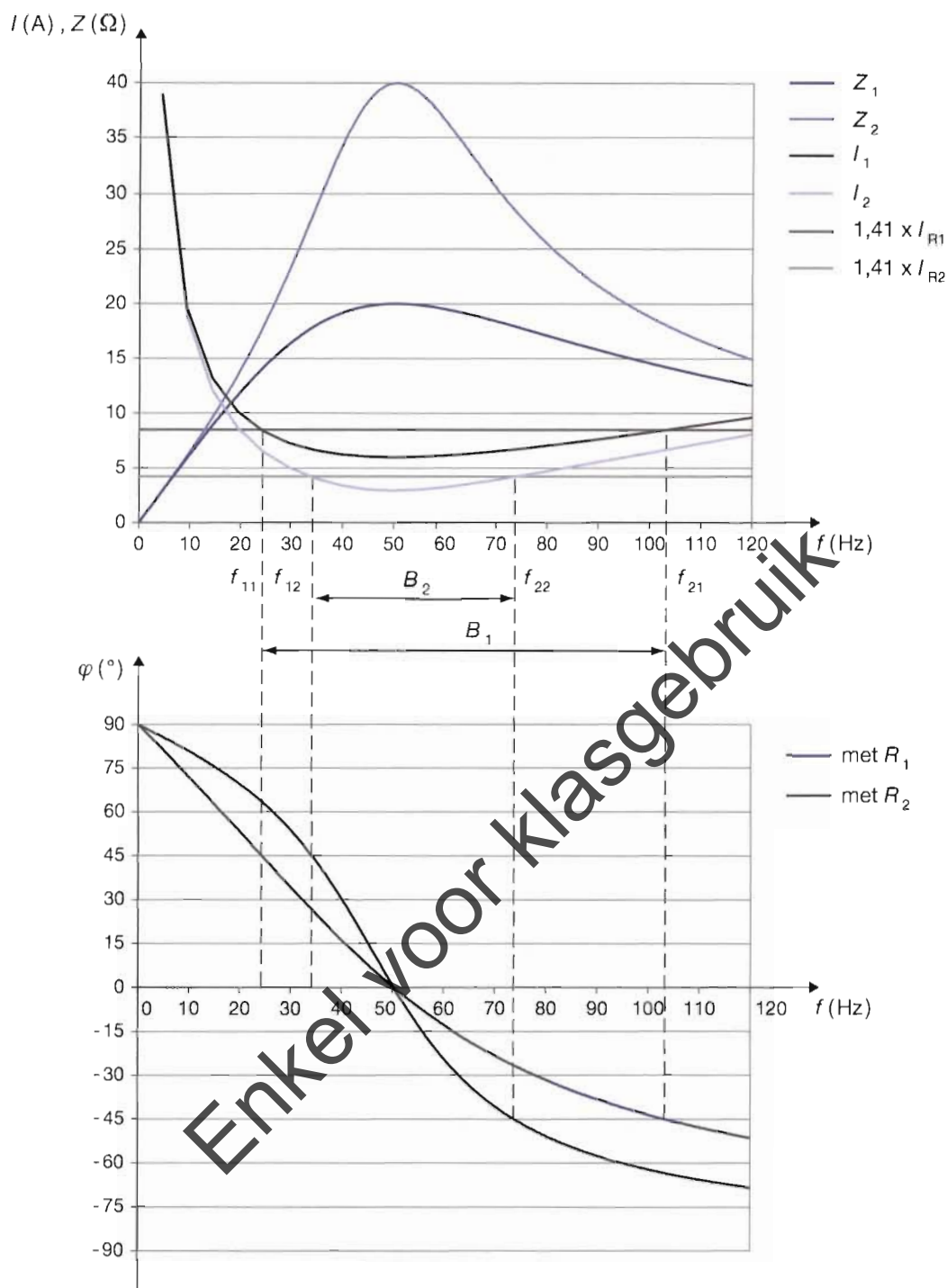


Fig. 5.10 Invloed van de gelijkstroomweerstand op de bandbreedte

Toelichting

Verbruikers aangesloten op het elektriciteitsnet

Op het elektriciteitsnet, dat een bijna constante waarde van de spanning en een constante waarde van de frequentie heeft, worden de verbruikers in parallel aangesloten. Een elektrische installatie of een kring in een elektrische installatie kunnen we beschouwen als een parallelkring aangesloten op wisselspanning. Bij de lage frequentie van de netspanning kunnen we de gelijkstroomweerstand van een praktische spoel meestal niet verwaarlozen tegenover de inductantie, X_L . Zo ontstaat een

serieschakeling binnen de parallelschakeling, zodat de schakeling een gemengde schakeling wordt. De gemengde schakelingen aangesloten op een wisselspanning bespreken we in leereenheid 6.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het vectorendiagram, het frequentiegedrag en de resonantiekrommen van de RLC-parallelkring.

5.4 Voorbeelden

- 1 Een condensator met een capaciteit van $6 \mu\text{F}$ is parallel geschakeld met een gelijkstroomweerstand van 80Ω (figuur 5.11). Bereken de hoofdstroom en de takstromen, de impedantie en de faseverschuiving tussen spanning en stroom als de aangelegde spanning 230 V is en de frequentie 50 Hz .

Gegeven: $C = 6 \mu\text{F} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
 $R = 80 \Omega$
 $U = 230 \text{ V}$
 $f = 50 \text{ Hz}$

Gevraagd: I, I_R, I_C, Z en φ

Oplossing:

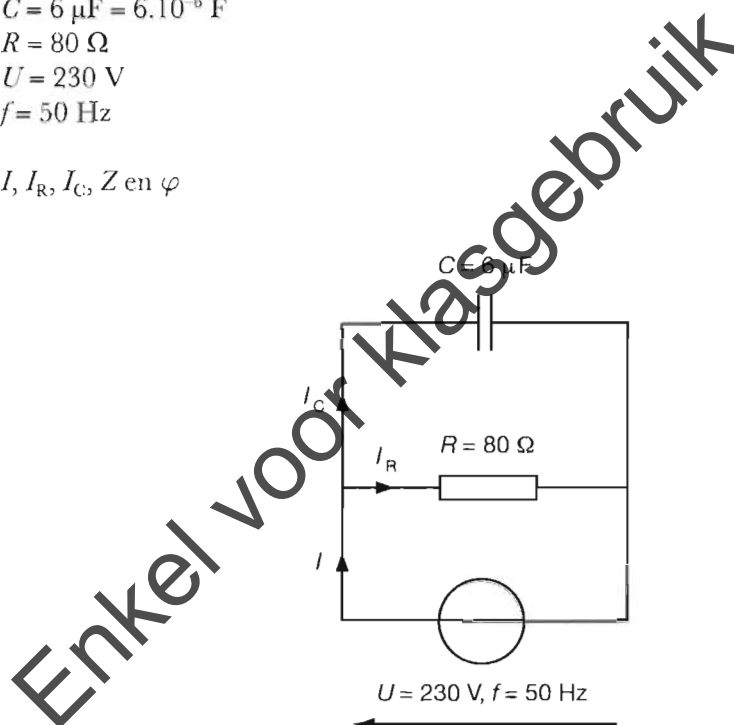


Fig. 5.11 Elektrisch schema bij voorbeeld 1

$$X_C = \frac{1}{(\omega \cdot C)} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 6 \cdot 10^{-6})} = 530,5 \Omega$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{230}{530,5} = 0,434 \text{ A}$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{230}{80} = 2,88 \text{ A}$$

In vergelijking met de RLC-parallelkring komt de zuivere zelfinductie L in dit voorbeeld niet voor. De impedantie van de ontbrekende tak is oneindig groot, zodat er geen stroom door vloeit. In de formule die het verband geeft tussen de bronstroom en de takstromen van de RLC-parallelkring stellen we $I_L = 0$. Dit doen we ook in de formule die we gebruiken om de faseverschuiving af te leiden.

$$I = \sqrt{(I_R^2 + I_C^2)} = 2,91 \text{ A}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230}{2,781} = 79,0 \Omega$$

$$\tan \varphi = \frac{-I_C}{I_R} = \frac{-0,434}{2,88} = -0,1507 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-0,1507) = -8,6^\circ$$

Complexe oplossing:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{80} + \frac{1}{-j530,5} = 12,50 \cdot 10^{-3} + j1,885 \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{12,50 \cdot 10^{-3} + j1,885 \cdot 10^{-3}} = 78,2 - j11,80$$

$$Z = \sqrt{78,2^2 + (-11,80)^2} = 79,1 \Omega$$

Aangezien de spanning gegeven is, beschouwen we ze als referentiesinus,

$$\bar{U} = 230 + j0$$

$$I = \frac{U}{Z} = UY = 230 \cdot (12,50 \cdot 10^{-3} + j1,885 \cdot 10^{-3}) = 2,875 + j0,434 = 2,91 \angle 8,6^\circ$$

$$I = 2,91 \text{ A}$$

De faseverschuiving wordt dan:

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = 0 - 8,6^\circ = -8,6^\circ$$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}}{R} = \frac{230 + j0}{80} = 2,875 + j0 = 2,875 \angle 0^\circ$$

$$I_R = 2,875 \text{ A}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}}{-jX_C} = \frac{230 + j0}{-j530,5} = 0 + j0,434 = 0,434 \angle 90^\circ$$

$$I_C = 0,434 \text{ A}$$

- 2 Een spoel met inductiecoëfficiënt $L = 0,250 \text{ H}$ is parallel aangesloten op een gelijkstroomweerstand $R = 150 \Omega$ (figuur 5.12). De bronspanning is $100,0 \text{ V}$ met frequentie 100 Hz . Bereken de hoofdstroom, de takstromen, de impedantie en de faseverschuivingshoek φ tussen de bronstroom en de bronspanning.

Gegeven: $L = 0,250 \text{ H}$
 $R = 150 \Omega$
 $U = 100,0 \text{ V}$
 $f = 100 \text{ Hz}$

Gevraagd: I, I_R, I_L, Z en φ

Oplossing:

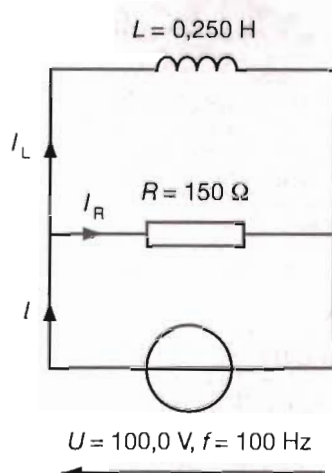


Fig. 5.12 Elektrisch schema bij voorbeeld 2

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 0,250 = 157,08 \Omega$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{100,0}{157,08} = 0,637 \text{ A}$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{100,0}{150} = 0,667 \text{ A}$$

In vergelijking met de RLC-parallelkring komt de zuivere capaciteit C in dit voorbeeld niet voor. De impedantie van de ontbrekende tak is oneindig groot, zodat er geen stroom door vloeit. In de formule die het verband geeft tussen de bronstroom en de takstromen van de RLC-parallelkring stellen we $I_C = 0$. Dit doen we ook in de formule die we gebruiken om de faseverschuiving af te leiden.

$$I = \sqrt{(I_R^2 + I_L^2)} = 0,922 \text{ A}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100,0}{0,922} = 108,5 \Omega$$

$$\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{0,637}{0,667} = 0,955 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(0,955) = 43,7^\circ$$

Complexe oplossing:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} = \frac{1}{150} + \frac{1}{j157,08} = 6,667 \cdot 10^{-3} - j6,366 \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{6,667 \cdot 10^{-3} - j6,366 \cdot 10^{-3}} = 78,5 + j74,9 = 108,5 \angle 43,7^\circ$$

$$Z = 108,5 \Omega$$

Aangezien de spanning gegeven is, beschouwen we ze als referentiesinus,
 $\bar{U} = 100,0 + j0$

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \bar{U} \bar{Y} = 100,0 \cdot (6,667 \cdot 10^{-3} - j6,366 \cdot 10^{-3}) = 0,6667 - j0,6366 \\ &= 0,922 \angle -43,7^\circ \end{aligned}$$

$$I = 0,922 \text{ A}$$

De faseverschuiving wordt dan:

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = 0 - (-43,7^\circ) = 43,7^\circ$$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{U}}{R} = \frac{100,0 + j0}{150} = 0,667 + j0 = 0,667 \angle 0^\circ$$

$$I_R = 0,667 \text{ A}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{jX_L} = \frac{100,0 + j0}{j157,08} = 0 - j0,637 = 0,637 \angle -90^\circ$$

$$I_L = 0,637 \text{ A}$$

- 3 Een spoel met inductiecoëfficiënt $L = 80 \text{ mH}$, een gelijkstroomweerstand van 12Ω en een condensator van $200 \mu\text{F}$ staan in parallel op een spanning van 200 V met frequentie 120 Hz (figuur 5.13). Bereken de impedantie van de parallelkring, de hoofdstroom en de faseverschuiving.

Gegeven: $L = 80 \text{ mH} = 80 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
 $R = 12 \Omega$
 $C = 200 \mu\text{F} = 200 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
 $U = 200 \text{ V}$
 $f = 120 \text{ Hz}$

Gevraagd: Z, I en φ

Oplossing:

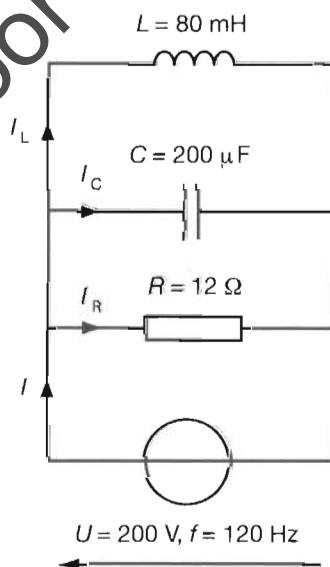


Fig. 5.13 Elektrisch schema bij voorbeeld 3

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 120 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 60,32 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{(\omega \cdot C)} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 120 \cdot 200 \cdot 10^{-6})} = 6,631 \Omega$$

$$Y = \sqrt{\left[\frac{1}{R}\right]^2 + \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right]^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{12}\right]^2 + \left[\frac{1}{60,32} - \frac{1}{6,631}\right]^2} = 0,1580 \text{ (S)}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0,1580} = 6,33 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200}{6,33} = 31,6 \, \text{A}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}} = R \cdot \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right] = 12 \cdot \left[\frac{1}{60,32} - \frac{1}{6,631} \right] = -1,611$$

$$\varphi = \tan^{-1}(-1,611) = -58,2^\circ$$

Complexe oplossing:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{12} + \frac{1}{j60,32} + \frac{1}{-j6,631} = 83,32 \cdot 10^{-3} + j134,2 \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{83,32 \cdot 10^{-3} + j134,2 \cdot 10^{-3}} = 3,34 - j5,38 = 6,33 \angle -58,2^\circ$$

$$Z = 6,33 \, \Omega$$

Aangezien de spanning gegeven is, beschouwen we ze als referentiesinus,

$$\bar{U} = 200 + j0$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \bar{U} \cdot \bar{Y} = 200 \cdot (83,32 \cdot 10^{-3} + j134,2 \cdot 10^{-3}) = 16,66 + j26,84 = 31,6 \angle +58,2^\circ$$

$$I = 31,6 \, \text{A}$$

De faseverschuiving wordt dan:

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = 0 - 58,2^\circ = -58,2^\circ$$

5.5 Opdrachten

- 1 Bereken de weerstandswaarde van de gelijkstroomweerstand die je parallel met een condensator van $1 \, \mu\text{F}$ moet schakelen om met een voedingsspanning met frequentie $50 \, \text{Hz}$ een faseverschuiving van 30° tussen bronspanning en bronstroom te krijgen.
- 2 Een parallelschakeling van $L = 0,1 \, \text{H}$, $C = 0,3 \, \mu\text{F}$ en $R = 100 \, \Omega$ is in resonantie. Bereken de frequentie waarvoor er resonantie optreedt.
- 3 In een kring staat $R = 25 \, \Omega$ parallel met een spoel waarvan $L = 0,3 \, \text{H}$. De bronspanning is $50 \, \text{V}$ en $f = 100 \, \text{Hz}$. Bereken de hoofdstroom, de takstromen, de totale impedantie en de faseverschuivingshoek tussen bronspanning en bronstroom.

- 4 Een gelijkstroomweerstand van $300\ \Omega$ is parallel geschakeld met een spoel met inductiecoëfficiënt $L = 30\text{ mH}$.
Bereken de frequentie waarvoor de faseverschuivingshoek tussen bronstroom en bronspanning 30° is.



Op de cd-rom vind je een diagnostische toets en extra taken.

Enkel voor klasgebruik

SYNTHESE

Parallelschakeling

1 Admittantie

In de wisselstroomtheorie noemen we het omgekeerde van de impedantie de admittantie.

De admittantie kunnen we zien als de geleidbaarheid van een wisselstroomkring.

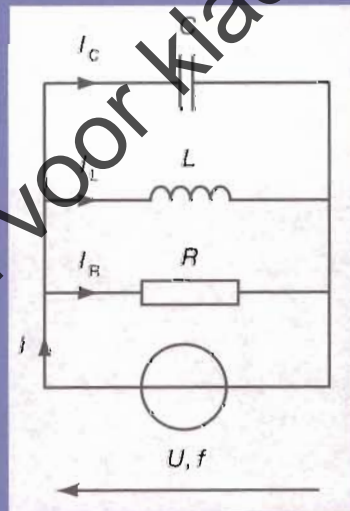
De admittantie, voorgesteld door Y , is de verhouding van de stroomsterkte tot de spanning, uitgedrukt in siemens (S, $1/\Omega$ of Ω^{-1}).

$$Y = Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} \text{ (S)}$$

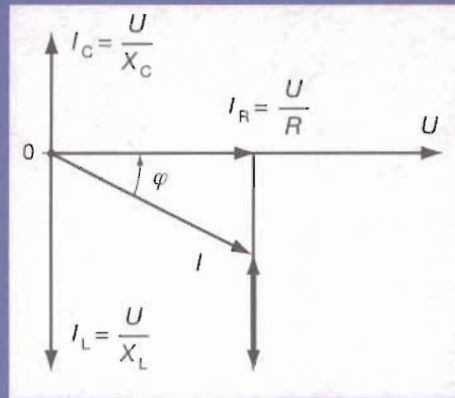
In een parallelkring gebruiken we de wet van Ohm om de stroomsterkte te berekenen, meestal in de vorm $I = U \cdot Y$.

2 Formules voor admittantie en faseverschuiving

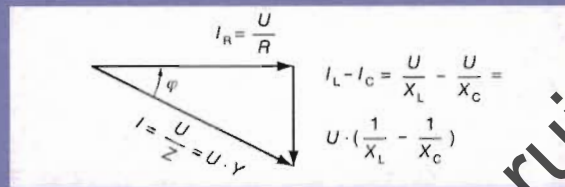
De meest complexe parallelkring aangesloten op wisselstroom kunnen we altijd herleiden tot de parallelschakeling van een zuiver ohmse, een zuiver inductieve en zuiver capacitieve component, die we kortweg een **RLC-parallelkring** noemen.



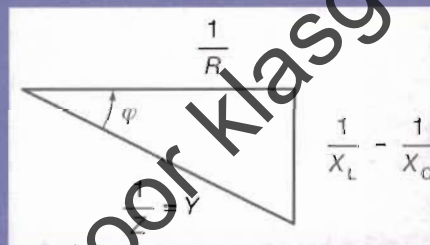
De formules voor de admittantie en de faseverschuivingshoek stellen we op door redenering uitgaande van de spanning.



Uit het vectorendiagram leiden we de **stroomdriehoek** af.



Uit de stroomdriehoek leiden we de **admittantiedriehoek** af.



Uit de admittantiedriehoek leiden we de formule voor de admittantie af met behulp van de stelling van Pythagoras.

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} \text{ (S)}$$

Uit de admittantiedriehoek leiden we de formules voor de faseverschuivingshoek af met behulp van de goniometrische getallen.

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{Z}} \qquad \cos \varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{R} \qquad \tan \varphi = \frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}}$$

Anders samengestelde parallelkringen bekomen we door een component in de RLC-parallelkring niet te gebruiken. In het schema van de RLC-parallelkring betekent dit dat we de component die we niet gebruiken, uit de kring verwijderen. De formules voor de admittantie en de faseverschuiving in de gewenste kring bekomen we door de admittantie van de niet gebruikte component in de formules van de RLC-parallelkring gelijk te stellen aan nul.

3 De complexe rekenwijze

In een parallelkring op wisselspanning is de complexe uitdrukking van de vervangings-admittantie de som van de complexe uitdrukking van de deeladmittanties. De complexe rekenwijze is echter maar efficiënt toe te passen als je beschikt over een tool waarmee je complex kan rekenen (een rekenblad op de PC of een 'grafisch' rekentoestel).

4 Frequentiegedrag van de RLC-parallelkring

Als $1/X_C > 1/X_L$ gedraagt de kring zich capacitief, $\varphi < 0$

Als $1/X_C < 1/X_L$ gedraagt de kring zich inductief, $\varphi > 0$

Als $X_C = X_L$ gedraagt de kring zich ohms en treedt resonantie op, $\varphi = 0$

De RLC-parallelkring is een voorbeeld van een bandsperfilter.

De inductiecoëfficiënt en de capaciteit bepalen de resonantiefrequentie, f_r .

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{Hz})$$

De stroomsterkte is minimaal als de frequentie van de aangelegde spanning gelijk is aan de resonantiefrequentie.

De bandbreedte B is omgekeerd evenredig en de kwaliteitfactor Q is recht evenredig met de gelijkstroomweerstand.

Enkel voor klasgebruik

Enkel voor klasgebruik