

Serieschakeling

WEGWIJZER

In leereenheid 3 onderzochten we het gedrag van een zuivere gelijkstroomweerstand, een ideale spoel en een ideale condensator aangesloten op een wisselspanningsbron. Dat onderzoek leverde voor elk belastingsgeval een specifieke wet van Ohm op. De ideale componenten (R , L en C) komen in de praktijk echter niet voor. De weerstanden, spoelen en condensatoren die in praktische toepassingen wel voorkomen, kunnen we beschouwen als combinaties van de ideale belastingsgevallen die we in de vorige leereenheid bestudeerden.

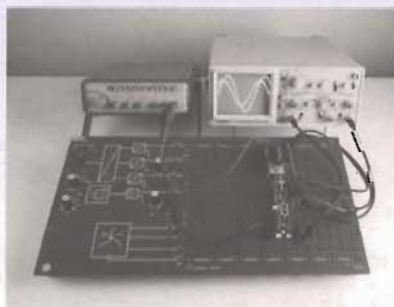
In leereenheid 4 zullen we het gedrag onderzoeken van een wisselstroomkring die enkele of alle vermelde ideale componenten in serie bevat.

We vangen de leereenheid aan met de studie van de serieschakeling van alle enkelvoudige passieve componenten (R , L en C) aangesloten op een wisselspanningsbron, de RLC-seriekring. In het tijdsdomein leiden we met behulp van het vectorendiagram de formules van de impedantie en de faseverschuiving van de RLC-seriekring af.

De formules van de impedantie en de faseverschuiving van anders samengestelde seriekringen bekomen we door de impedantie van de (ontbrekende) componenten in de formules van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

De complexe rekenwijze bewijst haar praktisch nut bij het oplossen van seriekringen aangesloten op wisselspanning.

Aan de hand van de resonantiekrommen bespreken we het gedrag van de RLC-seriekring in het frequentiedomein en besteden we aandacht aan de toepassing in de praktijk.



4.1 Impedantie en faseverschuiving van een RLC-seriekring

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het begrip RLC-seriekring omschrijven.
- het elektrisch schema van een RLC-seriekring tekenen, de componenten benoemen en de grootheden bronspanning, frequentie, stroomsterkte en deelspanningen aanduiden.
- uitgaande van de stroomvector het vectorendiagram van de RLC-seriekring opstellen als de kring zich inductief, capacitief of ohms gedraagt.
- uit het vectorendiagram van de RLC-seriekring de spanningsdriehoek afleiden.
- uit de spanningsdriehoek van de RLC-seriekring het verband tussen de effectieve waarde van de deelspanningen en de effectieve waarde van de aangelegde spanning afleiden.
- goniometrisch de faseverschuiving van de RLC-seriekring berekenen uit de spanningsdriehoek.
- uit de spanningsdriehoek van de RLC-seriekring de impedantiedriehoek afleiden.
- uit de impedantiedriehoek van de RLC-seriekring de formule voor het berekenen van de impedantie afleiden.
- uit de impedantiedriehoek van de RLC-seriekring de formules voor het berekenen van de faseverschuiving afleiden.
- uit de formules van de RLC-seriekring de formules van de impedantie en de faseverschuiving van een andere seriekring of een enkelvoudige kring afleiden.

4.1.1 Definities

Een RLC-seriekring is een serieschakeling van de enkelvoudige passieve componenten R , L en C . De meest complexe seriekring aangesloten op wisselstroom kunnen we altijd herleiden tot de serieschakeling van een zuiver ohmse, een zuiver inductieve en een zuiver capacitieve component, die we kortweg een RLC-seriekring noemen. Figuur 4.1 stelt het elektrisch schema van een RLC-seriekring met zijn onderscheiden grootheden voor.

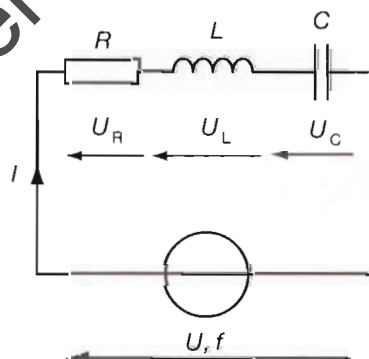


Fig. 4.1 Elektrisch schema van een RLC-seriekring

4.1.2 Opstellen van het vectorendiagram

We veronderstellen dat we de waarde van de componenten (de weerstand R van de gelijkstroomweerstand, de inductiecoëfficiënt L van de ideale spoel en de capaciteit C van de ideale condensator), de frequentie f van de aangelegde spanning en de stroomsterkte I kennen. De aangelegde spanning is onbekend.

Omdat de stroom door alle componenten bij een seriekring dezelfde is, beginnen we in het vectorendiagram van figuur 4.2 de stroom vanuit de oorsprong O horizontaal en naar rechts (referentiusinus) te tekenen.

Als we de stroomzin op het schema volgen, vloeit de stroom eerst door de gelijkstroomweerstand. Over de gelijkstroomweerstand ontstaat een spanning U_R . Als we enkel de gelijkstroomweerstand beschouwen, dan zijn I en U_R de stroomsterkte door en de spanning over een zuiver ohmse weerstand. De spanning U_R is dus niet verschoven t.o.v. de stroom (heeft dezelfde richting en zin als of is in fase met). De spanning over de gelijkstroomweerstand berekenen we met $U_R = I \cdot R$.

Vervolgens vloeit de stroom door de spoel. Over de spoel ontstaat een spanning U_L . Als we enkel de ideale spoel beschouwen, dan zijn I en U_L de stroomsterkte door en de spanning over de inductieve reactantie. De spanning U_L ijlt dus 90° of $\pi/2$ rad voor op de stroom. De spanning over de spoel berekenen we met $U_L = I \cdot X_L$.

Vervolgens vloeit de stroom door de condensator. Over de condensator ontstaat een spanning U_C . Als we enkel de ideale condensator beschouwen dan zijn I en U_C de stroomsterkte door en de spanning over de capacatieve reactantie. De spanning U_C ijlt dus 90° of $\pi/2$ rad na op de stroom. De spanning over de condensator berekenen we met $U_C = I \cdot X_C$.

Nu maken we gebruik van de tweede eigenschap van de serieschakeling, namelijk dat de aangelegde spanning gelijk is aan de som van alle deelspanningen. Aangezien we de deelspanningen vectorieel voorstellen, is de aangelegde spanning de vectoriële som of de resultante van de deelspanningen.

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C$$

Als we de som moeten maken van verschillende vectoren die niet in fase zijn, gebruiken we de kop-aan-staart-methode of de stangenveelhoek. Hierbij tekenen we alle vectoren, met behoud van hun richting en zin, zodanig dat het beginpunt van de ene vector achtereenvolgens samenvalt met het eindpunt van de voorgaande. De vector die het beginpunt van de eerste vector met het eindpunt van de laatste vector verbindt, is dan de resulterende vector. Ten slotte duiden we de faseverschuiving φ aan met een pijl die begint op de stroomvector en eindigt op de spanningsvector.

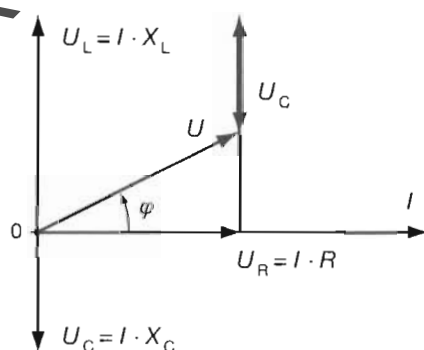


Fig. 4.2 Vectorendiagram van een inductieve RLC-seriekring

Uit het vectorendiagram (figuur 4.2) blijkt dat de faseverschuiving positief is en de spanning dus voorijlt op de stroom. De faseverschuiving is echter kleiner dan 90° of $\pi/2$ rad, zodat de kring niet zuiver inductief is. We zeggen: de kring gedraagt zich inductief.

Het gedrag van de kring hangt af van de frequentie f van de aangelegde spanning en van de waarden van de componenten (R , L en C). De kring gedraagt zich inductief als

$U_L > U_C$, als $I \cdot X_L > I \cdot X_C$, dus als $X_L > X_C$.

Als $X_C > X_L$ dan zal de kring zich capacitief gedragen, want I ijlt dan voor op U (figuur 4.3).

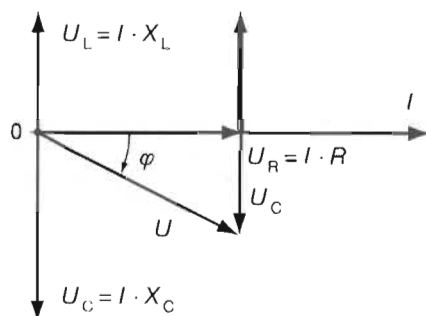


Fig. 4.3 Vectorendiagram van een capacitieve RLC-seriekring

Als $X_C = X_L$ dan zal de kring zich resistief (ook ohms of zuiver ohms) gedragen, want I is dan niet verschoven tegenover U (figuur 4.4). Hoewel de kring faseverschuivende componenten bevat (de spoel en de condensator), gedraagt hij zich toch als een zuiver ohmse kring. We zeggen: de RLC-seriekring is in resonantie.

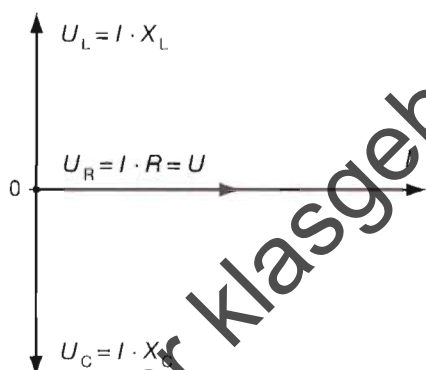


Fig. 4.4 Vectorendiagram van een resistieve RLC-seriekring

4.1.3 Spanningsdriehoek

In het vectorendiagram van figuur 4.2 vormen de spanningsvectoren een rechthoekige driehoek (figuur 4.5). De spanning over de weerstand is de aanliggende zijde van de hoek φ . De overstaande zijde van de hoek φ is het verschil van de spanning over de spoel en de spanning over de condensator. De schuine zijde van de driehoek is de aangelegde spanning. In elke wisselstroomkring is de aangelegde spanning $U = I \cdot Z$.

Die rechthoekige driehoek noemen we de spanningsdriehoek.

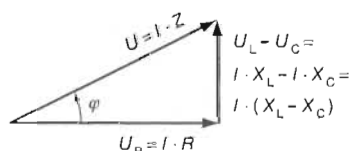


Fig. 4.5 Spanningsdriehoek van een inductieve RLC-seriekring

Met de stelling van Pythagoras tonen we het verband aan tussen de effectieve waarden van de spanningen in de RLC-seriekring

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

Uit de formule blijkt duidelijk dat je in een RLC-seriekring de effectieve waarden van de deelspanningen niet zonder meer mag optellen om de effectieve waarde van de aangelegde spanning te berekenen.

Uit de spanningsdriehoek leiden we goniometrisch de waarde van de faseverschuiving af.

$$\sin \varphi = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{U_L - U_C}{U}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{U_R}{U}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{U_L - U_C}{U_R}$$

4.1.4 Impedantiedriehoek

In de spanningsdriehoek van figuur 4.5 is elke zijde evenredig met de stroomsterkte I . Als we alle zijden door de waarde I delen, dan ontstaat een nieuwe gelijkvormige of congruente driehoek (figuur 4.6). De weerstandswaarde R van de gelijkstroomweerstand (ook de impedantie van de zuiver ohmse kring) is de aanliggende zijde van de faseverschuiving φ . De overstaande zijde van de faseverschuiving φ is het verschil van de inductantie X_L van de spoel (ook de impedantie van de zuiver inductieve kring) en de capacitantie X_C van de condensator (ook de impedantie van de zuiver capacatieve kring). De schuine zijde is de impedantie Z van de RLC-seriekring. De recht-hoekige driehoek noemen we dan ook de impedantiedriehoek. Soms gebruiken we ook de naam weerstandsdriehoek.

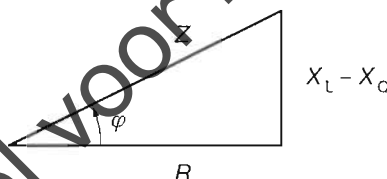


Fig. 4.6 Impedantiedriehoek van de inductieve RLC-seriekring

Met de stelling van Pythagoras leiden we de formule voor het berekenen van de impedantie van de RLC-seriekring af uit de impedantiedriehoek.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\Omega)$$

Uit de impedantiedriehoek leiden we goniometrisch de faseverschuiving af.

$$\sin \varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Toelichtingen

Volgorde van L en C

Als je de redenering voor het afleiden van de formules zelf opstelt, zou het kunnen gebeuren dat je de volgorde van de grootheden (deelspanning en reactantie) van de spoel en de condensator omwisselt.

Op de formules $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ en $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ heeft het omwisselen geen invloed omdat het verschil gekwadrateerd wordt.

Het omwisselen heeft bij de formules voor de sinus en de tangens wel een tegengesteld teken tot gevolg.

In de formules moet je altijd de grootte van de condensator aftrekken van de grootte van de spoel, $X_L - X_C$ en $U_L - U_C$. Dit zullen we vrij eenvoudig kunnen aantonen als we de complexe rekenwijze toepassen.

De faseverschuivingshoek berekenen uit de goniometrische getallen

Uit de spanningsdriehoek en de impedantiedriehoek bepalen we de goniometrische getallen of de goniometrische verhoudingen: sinus, cosinus en tangens van de faseverschuivingshoek φ . De faseverschuivingshoek φ berekenen we met een rekentoestel door de inverse functie van het goniometrisch getal te nemen.

$$\varphi = \sin^{-1}(\sin \varphi)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(\cos \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\tan \varphi)$$

Teken of zin van de faseverschuiving

De faseverschuiving in een RLC-seriekring kan waarden aannemen tussen -90° en $+90^\circ$.

Uit de goniometrische cirkel blijkt: van -90° naar $+90^\circ$ verandert de sinus van -1 tot $+1$, de tangens van $-\infty$ tot $+\infty$, maar is de cosinus altijd positief. Om het teken of de zin van de faseverschuiving te bepalen, gebruiken we de formule van de sinus of de tangens.

Gebruik van de formules van de RLC-seriekring in praktische toepassingen

Bij de redenering voor het opstellen van de formules van een seriekring veronderstellen we dat we de stroomsterkte kennen. In praktische toepassingen kennen we meestal de aangelegde spanning en haar frequentie. Met de frequentie van de aangelegde spanning en de waarde van de aangelegde spanning berekenen we de impedantie Z van de kring. Om de stroomsterkte te berekenen delen we de waarde van de aangelegde spanning door de impedantie.

$$I = \frac{U}{Z}$$

De deelspanningen berekenen we door de stroomsterkte te vermenigvuldigen met de impedantie van de componenten.

Formules van de impedantie en de faseverschuiving van anders samengestelde serieschakelingen

We hebben de formules voor de impedantie en de faseverschuiving opgesteld voor de meest uitgebreide serieschakeling: de RLC-seriekring. De andere seriekringen en de eenvoudige kringen bekomen we door een of meerdere componenten in de RLC-seriekring niet te gebruiken. In het schema van de RLC-seriekring betekent dit dat we de componenten die we niet gebruiken, vervangen door een geleider. De formules voor de impedantie en de faseverschuiving in de gewenste kring bekomen we door de impedantie van de niet gebruikte componenten in de formules van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

Toegepast op de zuiver capacatieve kring geeft dit het volgende.

Een zuiver capacatieve kring is een RLC-seriekring waarin de gelijkstroomweerstand en de ideale spoel niet voorkomen ($R = 0$ en $X_L = 0$).

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{0^2 + (0 - X_C)^2} = \sqrt{(-X_C)^2} = X_C \text{ } (\Omega)$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{0 - X_C}{X_C} = -1 \text{ zodat}$$

$$\varphi = \sin^{-1}(\sin \varphi) = \sin^{-1}(-1) = -90^\circ \text{ of } -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0 - X_C}{0} = -\infty \text{ zodat}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\tan \varphi) = \tan^{-1}(-\infty) = -90^\circ \text{ of } -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Uit de formules van de sinus en de tangens kunnen we afleiden dat de bronstroom in een zuiver capaciteive kring 90° of $\pi/2$ rad voorijlt op de aangelegde spanning.

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{0}{-X_C} = 0 \text{ zodat } \varphi = \cos^{-1}(\cos \varphi) = \cos^{-1}(0) = +/ - 90^\circ \text{ of } \pm \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Uit de formule van de cosinus kunnen we wel afleiden dat de aangelegde spanning en de bronstroom in een zuiver capaciteive kring 90° of $\pi/2$ rad verschoven zijn, maar niet welke grootheid voorijlt op de andere.

4.2 Berekenen van een RLC-seriekring met de complexe rekenwijze

Leerdoelen

Hierna kan je:

- met behulp van de complexe rekenwijze de grootte en de hoek van alle vectoren in het vectorendiagram van een RLC-seriekring berekenen.
- op het vectorendiagram van een RLC-seriekring aantonen dat de aangelegde spanning de vectoriële som van de deelspanningen is.
- de faseverschuiving in een wisselstroomkring aanduiden op het vectorendiagram en de faseverschuivingshoek bepalen uit de fase van de aangelegde spanning en de bronstroom.

We passen de complexe rekenwijze toe op een rekenvoorbeeld.

We sluiten de serieschakeling van een gelijkstroomweerstand met een weerstandswaarde van $6,67 \Omega$, een ideale spoel met een inductiecoëfficiënt van $15,92 \text{ mH}$ en een ideale condensator met een capaciteit van $1273 \mu\text{F}$ aan op een sinusvormige wisselspanning van $85,4 \text{ V}$ met een frequentie van $50,0 \text{ Hz}$.

Gegeven: $U = 85,4 \text{ V}$
 $f = 50,0 \text{ Hz}$
 $R = 6,67 \Omega$
 $L = 15,92 \text{ mH}$
 $C = 1273 \mu\text{F}$

- Gevraagd:
- Bereken alle spanningen en stromen in de kring en stel ze voor in een vectorendiagram.
 - Toon complex en vectorieel aan dat de aangelegde spanning gelijk is aan de som van de deelspanningen.
 - Bereken de faseverschuiving en duid ze aan op het vectorendiagram.

Oplossing: We berekenen eerst de complexe voorstelling van de impedantie van de passieve componenten.

$$\bar{Z}_R = R = 6,67 \, \Omega = 6,67 + j0 \, (\Omega)$$

$$\bar{Z}_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50,015,92 \cdot 10^{-3} = j5,00 \, \Omega = 0 + j5,00 \, (\Omega)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_C &= -j \cdot X_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50,01273 \cdot 10^{-6}} \\ &= -j2,50 \, \Omega = 0 - j2,50 \, (\Omega) \end{aligned}$$

In een seriekring op gelijkspanning is de vervangingsweerstand de som van de deelweerstand.

In een seriekring op wisselspanning wordt dit: de complexe uitdrukking van de vervangingsimpedantie is de som van de complexe uitdrukking van de deelimpedanties.

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = 6,67 + j5,00 - j2,50 = 6,67 + j2,50 \, (\Omega)$$

In de opgave is de spanning gegeven: $U = 85,4 \, \text{V}$. We beginnen het vectorendiagram met de spanning en tekenen die in de referentiestand (horizontaal en naar rechts gericht) vanuit de oorsprong O. De spanning kunnen we voorstellen door een zuiver reëel complex getal.

$$\bar{U} = 85,4 + j0 \, (\text{V})$$

De stroom berekenen we uit de spanning en de vervangingsimpedantie.

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{85,4 + j0}{6,67 + j2,50}$$

Dit kan je wiskundig oplossen door de teller en de noemer van de breuk te vermenigvuldigen met het toegevoegde complex getal van de noemer. Het toegevoegde van een complex getal is een complex getal met hetzelfde reële deel, maar met het tegengestelde imaginaire deel. Zo zijn $a + jb$ en $a - jb$ toegevoegde complexe getallen.

De complexe rekenwijze is echter maar efficiënt toe te passen als je beschikt over een tool waarmee je complex kan rekenen (een rekenblad op de PC of een 'grafisch' rekentoestel).

$$\bar{I} = 11,23 - j4,21$$

De lengte van de stroomvector is de modulus van het complex getal

$$I = \sqrt{11,23^2 + (-4,21)^2} = 12,00 \, \text{A}$$

De hoek waaronder we de vector moeten tekenen is het argument van het complex getal.

$$\alpha_I = \tan^{-1} \frac{-4,21}{11,23} = -20,5^\circ$$

Dit kunnen we ook bekomen door het rekestel de poolcoördinaten of de exponentiële vorm van het complex getal te laten tonen.

Vervolgens berekenen we de complexe uitdrukkingen van de deelspanningen.

$$\bar{U}_R = \bar{I} \cdot \bar{Z}_R = (11,23 - j4,21) \cdot (6,67 + j0) = 74,9 - j28,1$$

$$U_R = 80,0 \text{ V en } \alpha_{U_R} = -20,5^\circ$$

$$\bar{U}_L = \bar{I} \cdot \bar{Z}_L = (11,23 - j4,21) \cdot (0 + j5,00) = 21,1 + j56,2$$

$$U_L = 60,0 \text{ V en } \alpha_{U_L} = +69,5^\circ$$

$$\bar{U}_C = \bar{I} \cdot \bar{Z}_C = (11,23 - j4,21) \cdot (0 - j2,50) = -10,5 - j28,1$$

$$U_C = 30,0 \text{ V en } \alpha_{U_C} = -110,5^\circ$$

Ter controle berekenen we de som van de complexe deelspanningen.

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = (74,9 - j28,1) + (21,1 + j56,2) + (-10,5 - j28,1) = 85,5 + j0$$

Op het vectorendiagram construeren we de resultante van de drie deelspanningen met een stangenveelhoek.

Ten slotte duiden we de faseverschuiving aan op het vectorendiagram.

$$\varphi = \alpha_U - \alpha_I = 0 - (-20,5) = 20,5^\circ$$

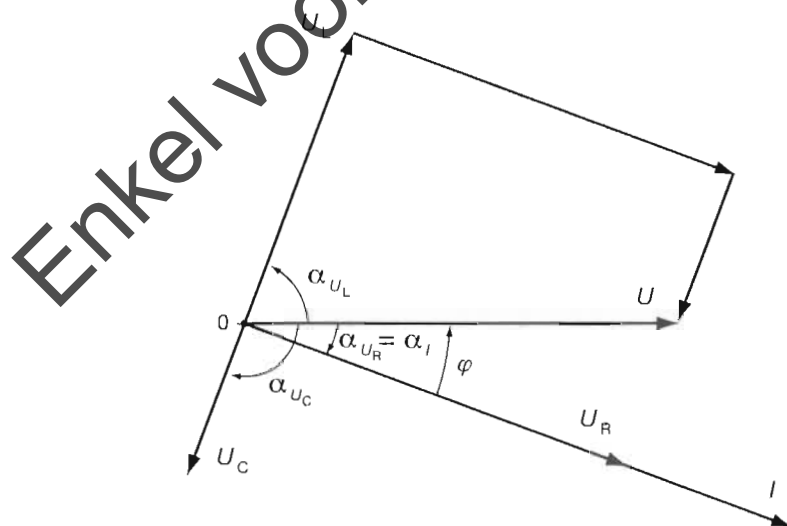


Fig. 4.7 Vectorendiagram bij de complexe berekening van de RLC-seriekring

Het vectorendiagram van figuur 4.7 is het vectorendiagram van figuur 4.2 dat over een hoek, die gelijk is aan de faseverschuivingshoek, verdraaid is in wijzerzin.

Toelichting

Impedantie, resistantie en reactantie

De complexe vorm van de impedantie van een RLC-seriekring is de som van de complexe vormen van de impedanties van de componenten.

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = (R + j0) + (0 + jX_L) + (0 - jX_C) = R + j(X_L - X_C)$$

Zo kunnen we eenvoudig aantonen dat we bij het bepalen van de impedantie de capacitantie moeten aftrekken van de inductantie. Het imaginaire deel van de complexe vorm van impedantie is het verschil van de inductieve reactantie en de capacitieve reactantie.

Dit verschil noemen we soms de reactantie van de kring. De reactantie stellen we voor door X en drukken we uit in Ω .

De complexe voorstelling van de impedantie wordt dan:

$$\bar{Z} = R \pm j \cdot X$$



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het vectorendiagram en het frequentiegedrag van de RLC-seriekring.

4.3 Resonantiekrommen van de RLC-seriekring

Leerdoelen

Hierna kan je:

- aan de hand van een berekeningsvoorbeeld de resonantiekrommen $Z = f(f)$, $I = f(f)$, $\varphi = f(f)$, $X_L = f(f)$ en $X_C = f(f)$ tekenen en het verloop t.o.v. elkaar toelichten.
- de resonantiekrommen $Z = f(f)$, $I = f(f)$ en $\varphi = f(f)$ tekenen voor een kring met dezelfde L en C , maar met een grotere weerstandswaarde R en uit die krommen de invloed van R toelichten.
- het begrip selectiviteit verklaren.
- de begrippen bandbreedte en -3 dB-punten van een RLC-seriekring definiëren.
- de bandbreedte van een RLC-seriekring berekenen en grafisch bepalen in een stroomsterkte-frequentie diagram.
- de invloed van de weerstand op de selectiviteit en de bandbreedte toelichten.
- het begrip overspanningsfactor of kwaliteitsfactor definiëren en de waarde voor een willekeurige wisselstroomkring bepalen.
- het frequentiegedrag van een LC-seriekring afleiden uit de RLC-seriekring.

4.3.1 Berekeningsvoorbeeld

In tabel 4.1 geven we de resultaten weer van de impedantie en de stroomsterkte van de RLC-seriekring van figuur 4.8. We berekenen, voor een toenemende frequentie per 5 Hz, de impedantie en de stroomsterkte voor de frequenties tussen 0 en 100 Hz, een eerste maal met de weerstand van 10Ω en een tweede maal met de weerstand van 40Ω .

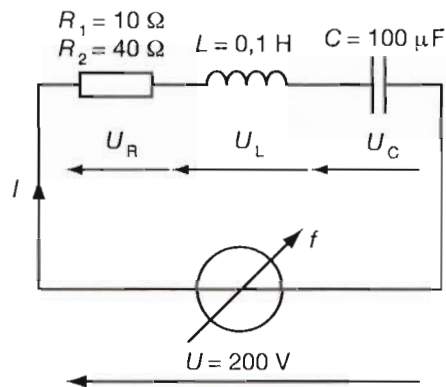


Fig. 4.8 Elektrisch schema voor het berekenen van de resonantiekrommen

f (Hz)	ω (rad/s)	X_L (Ω)	X_C (Ω)	X (Ω)	Z_1 (Ω)	Z_2 (Ω)	I_1 (A)	I_2 (A)	φ_1 ($^\circ$)	φ_2 ($^\circ$)
0	0,000	0,000	∞	∞	∞	∞	0,000	0,000	-90,0	-90,0
5	31,416	3,142	318,310	315,168	315,327	317,696	0,634	0,630	-88,2	-82,8
10	62,832	6,283	159,155	152,872	153,198	158,018	1,305	1,266	-86,3	-75,3
15	94,248	9,425	106,103	-96,679	97,194	104,627	2,058	1,912	-84,1	-67,5
20	125,664	12,566	79,577	-67,011	67,753	78,042	2,952	2,563	-81,5	-59,2
25	157,080	15,708	63,662	-47,954	48,986	62,447	4,083	3,203	-78,2	-50,2
30	188,496	18,850	53,052	-34,202	39,634	52,629	5,613	3,800	-73,7	-40,5
35	219,911	21,991	45,473	-23,482	25,522	46,383	7,836	4,312	-66,9	-30,4
40	251,327	25,133	39,789	-14,655	17,743	42,600	11,272	4,695	-55,7	-20,1
45	282,743	28,274	35,368	-7,093	12,260	40,624	16,313	4,923	-35,3	-10,1
50	314,159	31,416	31,831	-0,415	10,009	40,002	19,983	5,000	-2,4	-0,60
55	345,575	34,558	28,937	5,620	11,471	40,393	17,435	4,951	29,3	8,00
60	376,991	37,699	26,526	11,173	14,995	41,531	13,338	4,816	48,2	15,6
65	408,407	40,841	24,485	16,355	19,170	43,215	10,433	4,628	58,6	22,2
70	439,823	43,982	22,736	21,246	23,482	45,292	8,517	4,416	64,8	28,0
75	471,239	47,124	21,221	25,903	27,766	47,655	7,203	4,197	68,9	32,9
80	502,655	50,265	19,894	30,371	31,975	50,224	6,255	3,982	71,8	37,2
85	534,071	53,407	18,724	34,683	36,096	52,942	5,541	3,778	73,9	40,9
90	565,487	56,549	17,684	38,865	40,131	55,772	4,984	3,586	75,6	44,2
95	596,903	59,690	16,753	42,937	44,086	58,682	4,537	3,408	76,9	47,0
100	628,319	62,832	15,915	46,916	47,970	61,653	4,169	3,244	78	49,5

Tabel 4.1 Berekeningen bij de resonantiekrommen

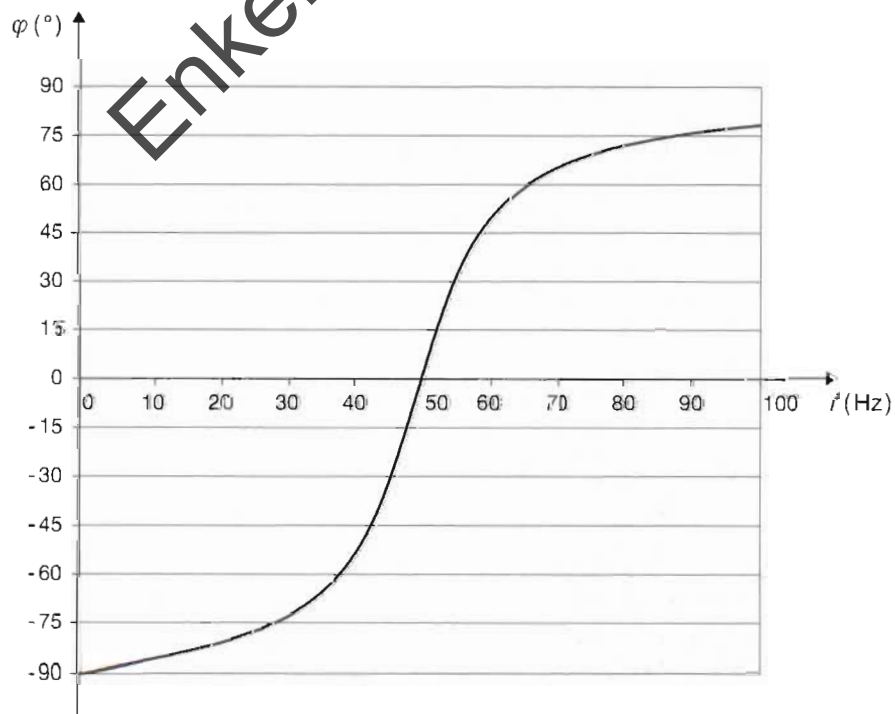
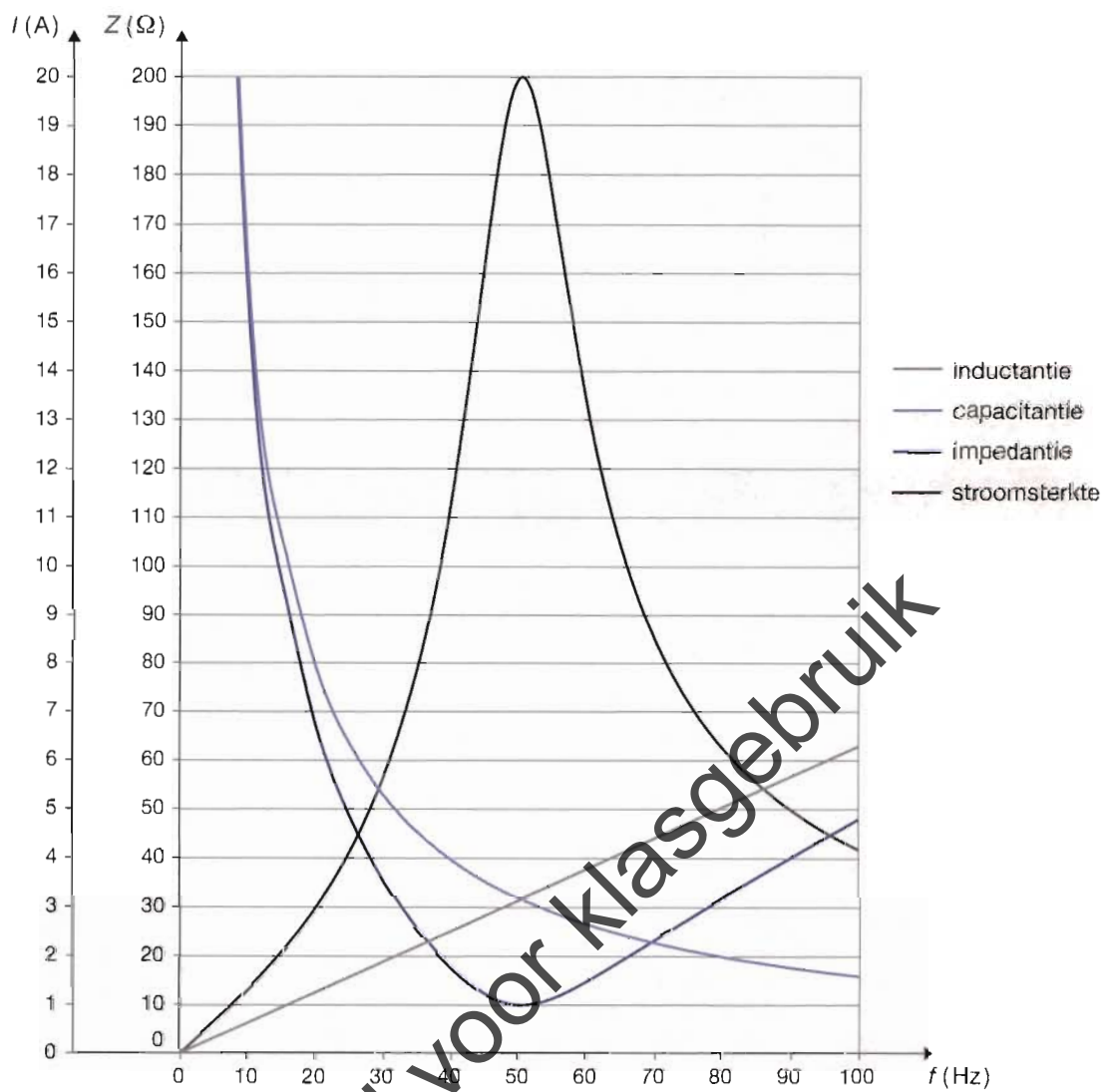


Fig. 4.9 De resonantiekrommen van een RLC-seriekring

4.3.2 Bespreking van figuren 4.9 en 4.10

a Impedantie-(stroomsterkte)-frequentie-diagram

In het berekeningsvoorbeeld beschouwen we een RLC-seriekring waarvan de aangelegde spanning, de frequentie en de waarden van de componenten bekend zijn. In deze paragraaf bestuderen we de RLC-seriekring in het frequentiedomein. We onderzoeken welke invloed de frequentie heeft op de impedantie van de componenten, de totale impedantie, de stroomsterkte en de faseverschuiving. We stellen de verschillende grootheden voor in een impedantie- of stroomsterkte-frequentie-diagram.

b Inductantie en capacitantie

De weerstandswaarde R van de gelijkstroomweerstand is onafhankelijk van de frequentie. We kunnen ze in een impedantie-frequentie-diagram voorstellen als een horizontale rechte boven de X -as.

De inductantie van de ideale spoel is evenredig met de frequentie. In een impedantie-frequentie-diagram is de vergelijking $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ van de vorm $y = a \cdot x$ en is de grafiek van de inductantie een stijgende rechte door de oorsprong.

De capacitantie van de ideale condensator is omgekeerd evenredig met de frequentie.

Als de frequentie van de aangelegde spanning nul is, d.i. als we de condensator aansluiten op een constante gelijkspanning, wordt de capacitantie oneindig groot. In een impedantie-frequentie-

diagram is de vergelijking $X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$ van de vorm $y = \frac{a}{x}$ en is de grafiek van de capacitantie een hyperbool.

c Resonantiefrequentie

Op het snijpunt van de grafieken van de inductantie en de capacitantie is $X_L = X_C$, zodat de RLC-seriekring in resonantie is. Dit gebeurt bij één frequentie die we de resonantiefrequentie noemen en voorstellen door f_r .

De formule voor het berekenen van de resonantiefrequentie leiden we af uit de voorwaarde:

$$X_{Lr} = X_{Cr}$$

$$\omega_r \cdot L = \frac{1}{\omega_r \cdot C}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

$$\text{waaruit volgt } f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{Hz})$$

$$\text{toegepast op het berekeningsvoorbeeld: } f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,1 \times 100 \cdot 10^{-6}}} = 50,3 \text{ Hz}$$

Uit de formule blijkt dat de resonantiefrequentie enkel afhangt van de inductiecoëfficiënt en de capaciteit. De weerstandswaarde beïnvloedt de resonantiefrequentie niet.

d Frequentiegedrag

Als de frequentie van de aangelegde spanning gelijk is aan de resonantiefrequentie, gedraagt de RLC-seriekring zich als een zuiver ohmse kring. De impedantie is gelijk aan de weerstandswaarde ($Z = R = 10 \Omega$). Op de resonantiefrequentie is de impedantie minimaal en de stroomsterkte maximaal. De faseverschuiving is 0, zodat de aangelegde spanning in fase is met de bronstroom.

Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie is de invloed van de capacitantie op de impedantie groter dan van de inductantie (de grafiek van de impedantie volgt ongeveer de grafiek van de capacitantie). De faseverschuiving is negatief, zodat de aangelegde spanning naijlt op de bronstroom. Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie gedraagt de RLC-seriekring zich capacitief.

Voor frequenties hoger dan de resonantiefrequentie is de invloed van de inductantie op de impedantie groter dan van de capacitantie (de grafiek van de impedantie loopt ongeveer evenwijdig met de grafiek van de inductantie). De faseverschuiving is positief, zodat de aangelegde spanning voorijlt op de bronstroom. Voor frequenties hoger dan de resonantiefrequentie gedraagt de RLC-seriekring zich inductief.

e Selectiviteit

Op de resonantiefrequentie is de impedantie van de kring minimaal en de stroomsterkte maximaal. Bij frequenties die afwijken van de resonantiefrequentie is de impedantie groter en de stroomsterkte kleiner. We kunnen dat ook als volgt uitdrukken: de frequenties die van de resonantiefrequentie afwijken, worden slechter doorgelaten. We beschikken met de RLC-seriekring over een selectiemiddel dat de stroomsterkte met frequentie f_r zal doorlaten terwijl de andere frequenties een grote weerstand ondervinden en hierdoor gededot worden. Naarmate de grafiek van de stroomsterkte steiler verloopt in de omgeving van de resonantiefrequentie, zal ook de selectiviteit van de kring groter zijn.

In figuur 4.10 stellen we vast dat bij $R_2 = 40 \Omega$ de grafiek van de stroomsterkte veel minder steil verloopt dan bij $R_1 = 10 \Omega$. De kleinste seriweerstand geeft de grootste selectiviteit. Als we de spoel of de condensator in een RLC-seriekring regelbaar maken, dan kunnen we de resonantiefrequentie veranderen, waardoor de stromen met een andere frequentie zullen worden doorge-

f Bandbreedte

De bandbreedte B is het verschil van twee frequenties f_1 en f_2 .

$$B = f_2 - f_1 \text{ (Hz)}$$

Bij de RLC-seriekring is het vermogen dat gedissipeerd wordt in de weerstand bij f_1 en bij f_2 de helft van het vermogen dat in de weerstand gedissipeerd wordt bij de resonantiefrequentie.

$$\frac{P_{R1,2}}{P_R} = \frac{1}{2}$$

In de audioteknik worden versterkingen en verzwakkingen uitgedrukt in decibel.

Om een verhouding uit te drukken in decibel nemen we eerst de 10-delige logaritme van de breuk en vermenigvuldigen die dan met 10, omdat een decibel een tiende van de eenheid bel voorstelt. De bel is een dimensieloze eenheid die afgeleid is van de naam van de uitvinder van de telefonie, Graham Bell. De bel zelf wordt als eenheid niet gebruikt.

$$10 \cdot \log \frac{P_{R1,2}}{P_R} = 10 \cdot \log \frac{1}{2} = -3 \text{ (dB)}$$

De frequenties f_1 en f_2 noemen we de -3 dB-punten van de grafiek van de stroomsterkte in het stroomsterkte-frequentie-diagram. Het minteken duidt op een verzwakking. Voor een versterking zouden we een plusteken gebruiken.

Het vermogen in de weerstand kunnen we ook berekenen zoals bij gelijkstroom.

$$P_R = U_R \cdot I = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R$$

Bij de -3 dB-punten wordt de formule dan:

$$10 \cdot \log \frac{P_{R1,2}}{P_{Rr}} = 10 \cdot \log \frac{I_{1,2}^2 \cdot R}{I_r^2 \cdot R} = 10 \cdot \log \left[\frac{I_{1,2}}{I_r} \right]^2 = 20 \cdot \log \left[\frac{I_{1,2}}{I_r} \right] = -3 \text{ (dB)}$$

Uit de laatste gelijkheid bepalen we de stroomverhouding:

$$\log \left[\frac{I_{1,2}}{I_r} \right] = \frac{-3}{20} \text{ (dB)}$$

$$10^{\log(I_{1,2}/I_r)} = 10^{-3/20}$$

$$\frac{I_{1,2}}{I_r} = 10^{-3/20} = 0,707 \text{ of } I_{1,2} = 0,707 \cdot I_r$$

Voor een RLC-seriekring zijn de -3 dB-punten de frequenties waarvoor de stroomsterkte 70,7 % is van de stroomsterkte bij resonantie.

De resonantiefrequentie is ook het meetkundig gemiddelde of het middenevenredige van de -3dB-punten.

Om de resultaten te controleren, kunnen we de resonantiefrequentie nog narekenen met de formule $f_r = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$.



Op de cd-rom vind je de wiskundige berekening van de -3 dB-punten en de bandbreedte van de RLC-seriekring.

Uit figuur 4.10 blijkt dat de RLC-seriekring de stroomsterkten binnen de bandbreedte veel beter doorlaat dan erbuiten. In de audiotechniek noemen we een frequentieselectieve schakeling ook een filter. De RLC-seriekring is een voorbeeld van een banddoorlaatfilter.

Uit figuur 4.10 blijkt dat de faseverschuivinghoek bij de -3 dB-punten in absolute waarde 45° is. Bij de -3 dB-punten wordt $|X_L - X_C| = R$ en is de impedantiedriehoek een gelijkbenige driehoek.

g Invloed van de weerstand

Uit figuur 4.10 blijkt dat de bandbreedte toeneemt als de weerstand toeneemt. Als we in het rekenvoorbeeld de weerstandswaarde verhogen van $R_1 = 10 \Omega$ naar $R_2 = 40 \Omega$, dan zal de bandbreedte toenemen van $B_1 = 15,9 \text{ Hz}$ naar $B_2 = 63,7 \text{ Hz}$. Naarmate de weerstandswaarde groter wordt, wordt de kring minder selectief, zodat de kring gedempt wordt door de weerstand.

In een ideale serie-resonantiekring komt geen weerstand voor; de RLC-seriekring wordt dan een LC-seriekring. De bandbreedte van een LC-seriekring is minimaal, zodat die alleen de stroom met een enkele frequentie, de resonantiefrequentie perfect ($Z_r = R = 0$) zal doorlaten en alle andere frequenties zal sperren.

h Overspanningsfactor of kwaliteitsfactor Q

Bij resonantie staat de aangelegde spanning over de gelijkstroomweerstand. Dit houdt echter niet in dat over de spoel en de condensator geen spanning zou staan. De spanningen over de spoel en de condensator zijn in tegenfase en heffen elkaar op terwijl hun absolute waarde zelfs hoger kan zijn dan de aangelegde spanning. De overspannings- of kwaliteitsfactor Q is de verhouding van de inductiespanning aan de klemmen van de spoel of de tegenspanning aan de klemmen van de condensator bij resonantie tot de aangelegde spanning.

$$Q = \frac{U_{Lr}}{U} = \frac{U_{Cr}}{U}$$

Door toepassing van de wet van Ohm wordt dit:

$$Q = \frac{I_r \cdot X_{Lr}}{I_r \cdot R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot L}{R}$$

en

$$Q = \frac{I_r \cdot X_{Cr}}{I_r \cdot R} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot C \cdot R}$$

Toegepast op het rekenvoorbeeld wordt dit:

- met $R_1 = 10 \Omega$

$$Q_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50,3 \cdot 0,1}{10} = 3,2 \quad \text{of} \quad Q_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50,3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 10} = 3,2$$

- met $R_2 = 40 \Omega$ is $Q_2 = 0,8$

Uit de formules blijkt dat de kwaliteitsfactor omgekeerd evenredig is met de weerstand.

In de LC-seriekring, waarin $R = 0$, wordt $Q = \infty$.

De kwaliteitsfactor is ook gelijk aan de verhouding van de resonantiefrequentie tot de bandbreedte:

$$Q = \frac{f_r}{B}$$

Toegepast op het rekenvoorbeeld wordt dit:

- met $R_1 = 10 \Omega$

$$Q_1 = \frac{f_r}{B_1} = \frac{50,3}{15,9} = 3,2$$

- met $R_2 = 40 \Omega$

$$Q_2 = \frac{f_r}{B_2} = \frac{50,3}{67,3} = 0,8$$

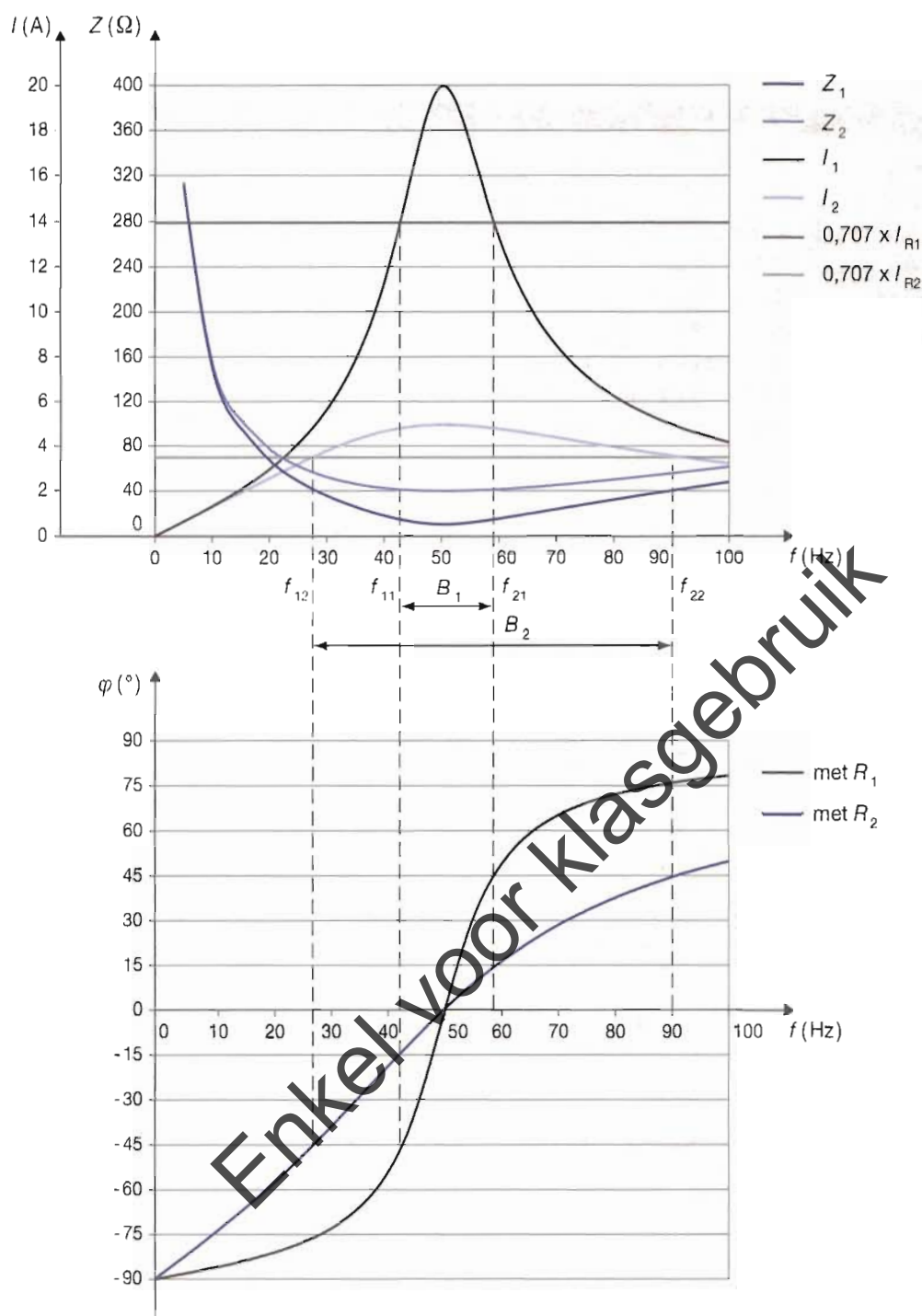


Fig. 4.10 Invloed van de serieweerstand op de bandbreedte



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond de resonantiekrommen van de RLC-seriekring.

4.4 RL-seriekringen

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het elektrisch vervangingsschema van een praktische spoel tekenen.
- de formules van de impedantie en de faseverschuiving van de RL-seriekring afleiden uit de formules van de RLC-seriekring.
- de componenten van de praktische spoel door meting bepalen.
- de tl-schakeling met brandende lamp herkennen als een RL-seriekring.
- het gebruik van een smoorspoel als spanningsverlager in wisselstroomkringen toelichten.
- de opbouw van een tl-schakeling met seriecompensatie omschrijven.
- het frequentiegedrag van de RL-seriekring toelichten.

4.4.1 Praktische spoel

In leerboek A-2 (5.3.1) toonden we al aan dat je een willekeurige in de praktijk voorkomende spoel altijd kan voorstellen als de serieschakeling van een ideale spoel met haar inductiecoëfficiënt L en een gelijkstroomweerstand met waarde R_s (figuur 4.11).

Een praktische spoel is een RL-seriekring.

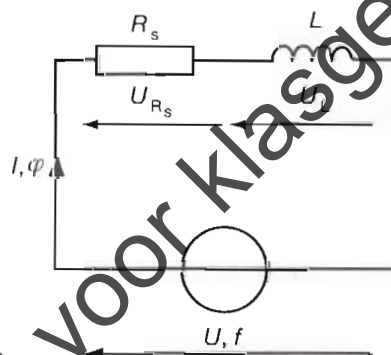


Fig. 4.11 Elektrisch vervangingsschema van een praktische spoel

4.4.2 Bepalen van de componenten van een praktische spoel

Als we een praktische spoel aansluiten op een constante gelijkspanning U_{DC} ($f = 0$), dan biedt de zuivere zelfinductie geen tegenstand ($X_L = 0$) aan de constante gelijkstroom I_{DC} .

De gelijkstroomweerstand R_s is dan ook gelijk aan de verhouding van de gelijkspanning tot de gelijkstroom.

$$R_s = \frac{U_{DC}}{I_{DC}}$$

Als we een ohmmeter aansluiten op de klemmen van een praktische spoel, stuurt de batterij van de ohmmeter een constante meetstroom door de spoel. De ohmmeter geeft dan de waarde van de gelijkstroomweerstand R_s aan.

Als we de spoel aansluiten op een wisselspanning U_{AC} met gekende frequentie f , zal er in de kring een wisselstroom I_{AC} vloeien. De impedantie van de kring is dan gelijk aan de verhouding van de wisselspanning tot de wisselstroom.

$$Z = \frac{U_{AC}}{I_{AC}}$$

De formule voor de impedantie van de RL-seriekring bekomen we door de capacitantie in de formule van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

Als we de formule voor de impedantie omvormen naar de formule voor de inductantie kunnen we de inductiecoëfficiënt L van de spoel berekenen.

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$L = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot f} \quad (\text{H})$$

4.4.3 TL-schakeling met smoorspoel

Figuur 4.12 stelt de schakeling van een tl-lamp voor. Als we de schakelaar sluiten wordt de lamp met behulp van de starter ontstoken. Als de lamp brandt maken de starterelektroden geen contact en vloeit er geen stroom door de gloeidraden en de starter. De stroom vloeit vanuit de bron door de ballast en de lamp. De brandende lamp zet elektrische energie om in licht. We kunnen ze nagenoeg beschouwen als een gelijkstroomweerstand. De smoorspoel kunnen we beschouwen als een zuivere zelfinductie. Als de lamp brandt, kunnen we de schakeling beschouwen als een RL-seriekring.

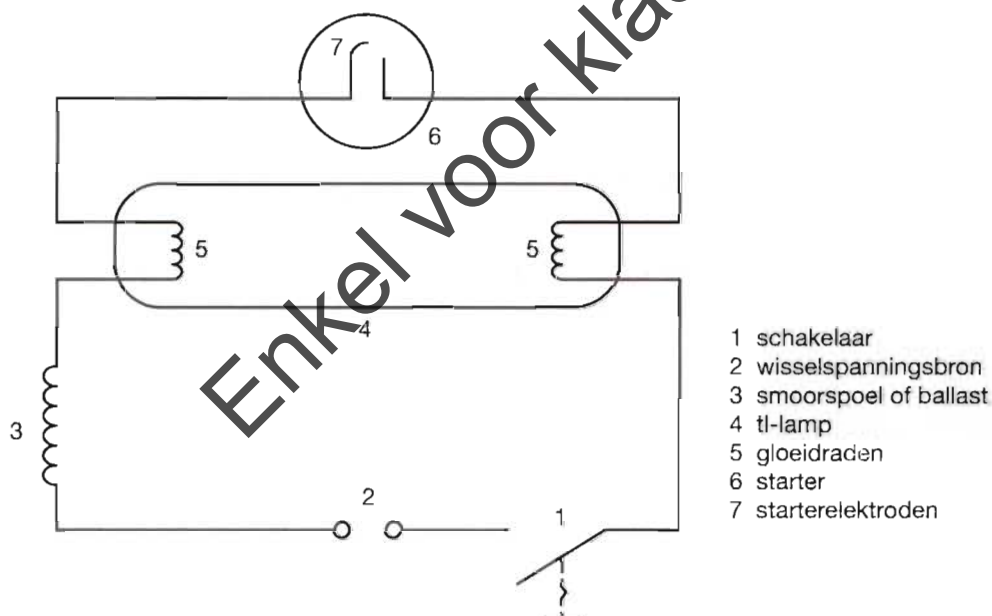


Fig. 4.12 TL-schakeling met smoorspoel

Als we de spanning over een component willen verlagen, kunnen we zoals in de gelijkstroomtheorie gebruikelijk is, een voorschakelweerstand gebruiken. Het nadeel hiervan is het grote jouleverlies in de gelijkstroomweerstand. In wisselstroomkringen schakelen we een smoorspoel in serie om de spanning over een component te verlagen. De smoorspoel veroorzaakt een inductieve spanningsval zonder noemenswaardige jouleverliezen, waardoor het rendement van het toestel toeneemt. Bij de brandende tl-lamp doet de smoorspoel dienst als 'verliesvrije voorschakelweerstand'.

In sommige toepassingen wordt de tl-schakeling met seriecompensatie gebruikt. In serie met de tl-schakeling wordt een condensator opgenomen, waarvan de capaciteit zo gekozen is, dat de stroomsterkte en de faseverschuiving in de kring gelijk blijven, maar de kring zich capacitief gedraagt. De tl-schakeling met seriecompensatie kunnen we beschouwen als een RLC-seriekring.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond de tl-schakeling met smoorspoel en de tl-schakeling met seriecompensatie.

4.4.4 Frequentiegedrag van de RL-seriekring

Als we de frequentie van de bronspanning verhogen (figuur 4.11), zal de inductantie van de kring $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ toenemen, de impedantie Z toenemen en de stroomsterkte I afnemen. Als we bij toenemende frequentie de stroomsterkte in een RL-seriekring willen behouden, dan zal de nodige bronspanning moeten toenemen.

De formules van de faseverschuivingshoeken bekomen we door de capacitantie in de formules van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

$$\sin \varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{X_L - 0}{Z} = \frac{X_L}{Z} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X_L - 0}{R} = \frac{X_L}{R}$$

De faseverschuiving bepalen we bijvoorbeeld uit de tangens

$$\varphi = \tan^{-1}(\tan \varphi) = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

De tangens van de faseverschuiving is altijd positief, zodat de faseverschuivingshoek altijd positief is, de aangelegde spanning altijd voorijlt op de bronstroom en de kring zich altijd inductief gedraagt.

Als de frequentie van de bronspanning toeneemt, zal X_L toenemen, zodat $\tan \varphi$ toeneemt, de faseverschuivingshoek φ groter wordt en de kring zich inductiever gedraagt.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het bepalen van de componenten van een praktische spoel, het vectorendiagram en het frequentiegedrag van de RL-seriekring.

4.5 RC-seriekringen

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de formule van de transfertfunctie van een onbelaste spanningsdeler met gelijkstroomweerstand afleiden uit het elektrisch schema.
- het elektrisch schema van een RC-seriekring die gebruikt wordt als laagdoorlaatfilter of hoogdoorlaatfilter tekenen.
- het frequentiegedrag van een RC-seriekring die gebruikt wordt als frequentieafhankelijke spanningsdeler door redenering aantonen.
- de transfertfunctie van een RC-seriekring die gebruikt wordt als frequentieafhankelijke spanningsdeler berekenen.
- de werking van de DC/AC-schakelaar van een oscilloscoop toelichten.
- het verband tussen een RC-seriekring als laagdoorlaatfilter en een integrator toelichten.
- het verband tussen een RC-seriekring als hoogdoorlaatfilter en een differentiator toelichten.
- een niet-ideale condensator die we tegenkomen in de praktijk transformeren naar een RC-seriekring.
- het begrip verlieshoek van een condensator verduidelijken.

4.5.1 Onbelaste spanningsdeler met gelijkstroomweerstand

In leerboek A-1 (8.2.1) bestudeerden we al de onbelaste spanningsdeler bij gebruik op gelijkspanning. In figuur 4.13 sluiten we een wisselspanning (de ingangsspanning, U_i) aan op een serieschakeling van twee gelijkstroomweerstand. We nemen een deel van de spanning af over een van de weerstanden (uitgangsspanning, U_u).

De vervangingsweerstand van de twee weerstanden is de impedantie van de kring.

$$I = \frac{U_i}{Z} = \frac{U_i}{R_v}$$

De stroom door de kring is in fase met de ingangsspanning.

De uitgangsspanning van de schakeling is de spanning over de weerstand R_2 .

$$U_u = I \cdot R_2$$

De uitgangsspanning is in fase met de stroomsterkte en dus ook met de ingangsspanning.

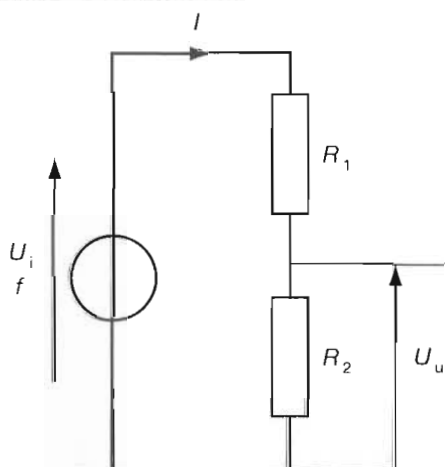


Fig. 4.13 Onbelaste spanningsdeler met weerstanden

Als we de formule van de stroomsterkte invullen in de formule van de uitgangsspanning, krijgen we:

$$U_u = \frac{R_2}{R_v} \cdot U_i$$

De breuk in het rechterlid van de vergelijking noemen we de overdrachts- of transfertfunctie van de schakeling.

$$\frac{U_u}{U_i} = \frac{R_2}{R_v}$$

De uitgangsspanning van de schakeling is altijd kleiner dan de ingangsspanning. De spanningsverzwakking door de schakeling is onafhankelijk van de frequentie.

4.5.2 RC-seriekring als laagdoorlaatfilter

In figuur 4.13 vervangen we weerstand R_2 door een ideale condensator (figuur 4.14).

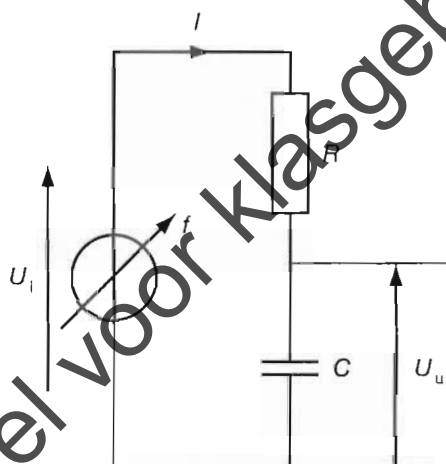


Fig. 4.14 RC-seriekring als laagdoorlaatfilter

De formule voor de impedantie van de RC-seriekring bekomen we door de inductantie in de formule van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

De stroomsterkte in de kring is de verhouding van de aangelegde spanning tot de impedantie:

$$I = \frac{U_i}{Z}$$

De uitgangsspanning van de schakeling is gelijk aan de spanning over de condensator.

$$U_u = U_C = I \cdot X_C = \frac{U_i}{Z} \cdot X_C = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \cdot U_i$$

De breuk in de formule is altijd kleiner dan de eenheid, want de teller is altijd kleiner dan de noemer. De schakeling is een spanningsdeler. De deelspanning is niet enkel afhankelijk van de waarden van de componenten, maar ook van de frequentie van de aangelegde spanning.

Bij heel lage frequenties wordt X_C heel groot. In de formule kunnen we R^2 verwaarlozen tegenover X_C^2 . De uitgangsspanning wordt bijna gelijk aan de ingangsspanning.

Bij heel hoge frequenties wordt X_C heel klein. In de formule kunnen we X_C^2 verwaarlozen tegenover R^2 , zodat de teller van de breuk veel kleiner wordt dan de noemer. De uitgangsspanning wordt veel kleiner dan de ingangsspanning.

In de schakeling van figuur 4.14 is de RC-seriekring een voorbeeld van een laagdoorlaatfilter.

4.5.3 RC-seriekring als hoogdoorlaatfilter

Als we in figuur 4.14 de gelijkstroomweerstand en de condensator van plaats verwisselen, krijgen we de schakeling van figuur 4.15.

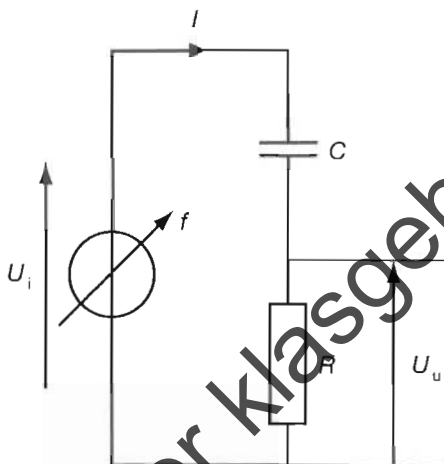


Fig. 4.15 RC-seriekring als hoogdoorlaatfilter

De formule voor de impedantie van de RC-seriekring bekomen we door de inductantie in de formule van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (-X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

De stroomsterkte in de kring is de verhouding van de aangelegde spanning tot de impedantie:

$$I = \frac{U_i}{Z}$$

De uitgangsspanning van de schakeling is gelijk aan de spanning over de gelijkstroomweerstand.

$$U_u = U_R = I \cdot R = \frac{U_i}{Z} \cdot R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \cdot U_i$$

De breuk in de formule is altijd kleiner dan de eenheid, want de teller is altijd kleiner dan de noemer. De schakeling is een spanningsdeler. De deelspanning is niet enkel afhankelijk van de waarden van de componenten, maar ook van de frequentie van de aangelegde spanning.

Bij heel lage frequenties wordt X_C heel groot. In de formule kunnen we R^2 verwaarlozen tegenover X_C^2 , zodat de teller van de breuk veel kleiner wordt dan de noemer. De uitgangsspanning wordt veel kleiner dan de ingangsspanning.

Bij heel hoge frequenties wordt X_C heel klein. In de formule kunnen we X_C^2 verwaarlozen tegenover R^2 . De uitgangsspanning wordt bijna gelijk aan de ingangsspanning.

In de schakeling van figuur 4.15 is de RC-seriekring een voorbeeld van een hoogdoorlaatfilter.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het vectorendiagram en het frequentiegedrag van de RC-seriekring en de RC-seriekring als laag- en hoogdoorlaatfilter.

Toelichtingen

Werking van de DC/AC-schakelaar bij een oscilloscoop

Op de ingang van een oscilloscoop sluiten we een wisselspanning U_{AC} met frequentie f aan, die gesuperponeerd is op een constante gelijkspanning U_{DC} (figuur 4.16).

Als de DC/AC-schakelaar van de oscilloscoop op stand DC staat, komt de volledige spanning (wisselspanning en gelijkspanning) over de ingangsweerstand R_{in} van de oscilloscoop. Als de schakelaar op stand AC staat, wordt de koppelcondensator C_k in serie geschakeld met de ingangsweerstand. De oscilloscoopingang wordt een RC-seriekring die gebruikt wordt als hoogdoorlaatfilter. De constante gelijkspanning met $f = 0$ wordt door de ingangskring zodanig verzwakt dat ze niet over de ingangsweerstand komt. De wisselspanning met frequentie f komt bijna onverzwakt over de ingangsweerstand.

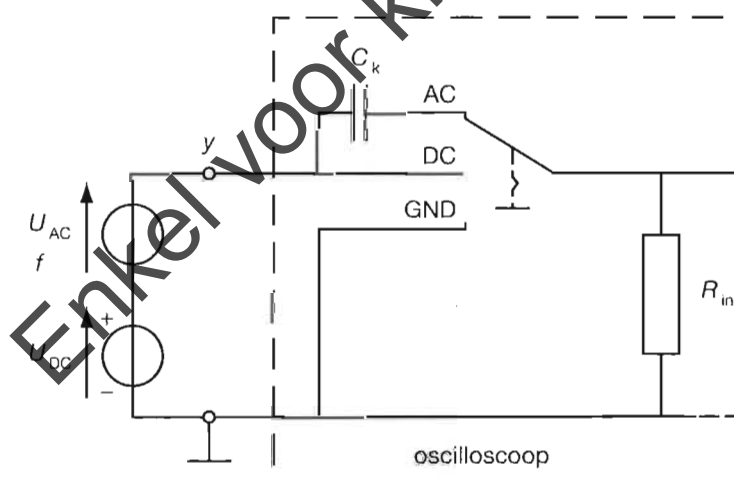


Fig. 4.16 Werking van de DC/AC-schakelaar bij een oscilloscoop

RC-serieschakeling als integrator

Als we een symmetrische blokvormige wisselspanning aansluiten aan de schakeling van figuur 4.14, wordt de uitgangsspanning bij een geschikte keuze van R en C een driehoekvormige spanning (figuur 4.17).

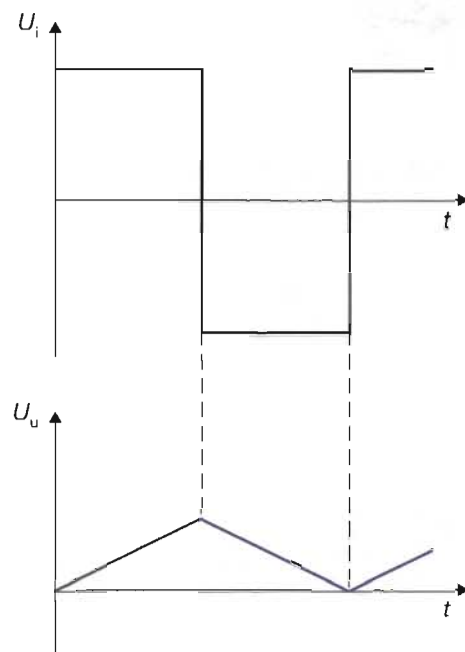


Fig. 4.17 Spanning-tijd-diagrammen van een integrator

De uitgangsspanning is een tijdsfunctie die evenredig verloopt met de oppervlakte tussen de grafiek van de ingangsspanning en de X-as. De oppervlakte kunnen we wiskundig berekenen met de integraal van de functie. Van de blokvormige ingangsspanning (die bestaat uit een oneindige som van de grondgolf en harmonischen) verschijnt op de uitgang een traag veranderende spanning (met lage frequentie). Het laagdoorlaatfilter noemen we soms een integrator. Deze integrator zal zijn praktisch nut bewijzen als elektronische regelaar in de procesregeltechniek.

RC-serieschakeling als differentiator

Als we een symmetrische blokvormige wisselspanning aansluiten aan de schakeling van figuur 4.15, wordt de uitgangsspanning bij een geschikte keuze van R en C een reeks naaldimpulsen (figuur 4.18).

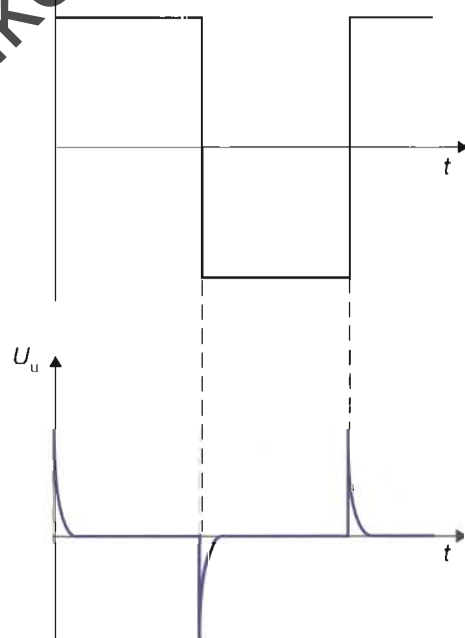


Fig. 4.18 Spanning-tijd-diagrammen van een differentiator

Er is enkel een uitgangsspanning als de ingangsspanning verandert. De helling van de grafiek van een functie kunnen we wiskundig berekenen met de afgeleide of differentiaal van de functie. Van de blokvormige ingangsspanning (die bestaat uit een oneindige som van de grondgolf en harmonischen) verschijnt op de uitgang een uiterst snel veranderende spanning (met hoge frequentie). Het hoogdoorlaatfilter noemen we soms een differentiator. Deze differentiator zal, zoals de integrator, zijn praktisch nut bewijzen als elektronische regelaar in de procesregeltechniek.

4.5.4 Verlieshoek van een niet-ideale condensator

Aangezien het diëlektricum van een condensator geen oneindig grote gelijkstroomweerstand heeft (lekstroom) en er ook diëlektrische verliezen veroorzaakt worden door het wisselend elektrisch veld, kunnen we een niet-ideale condensator voorstellen door een ideale condensator met een kleine gelijkstroomweerstand in serie (figuur 4.19).

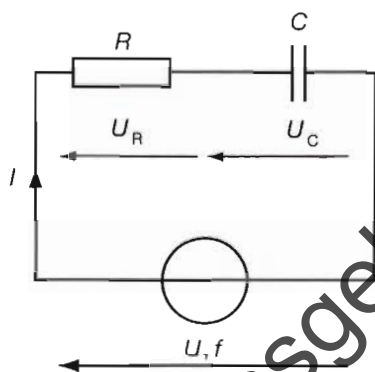


Fig. 4.19 Vervangingsschema van een niet-ideale condensator op wisselspanning

Figuur 4.20 stelt het vectorendiagram van een niet-ideale condensator voor. De stroom ijlt minder dan 90° voor op de spanning.

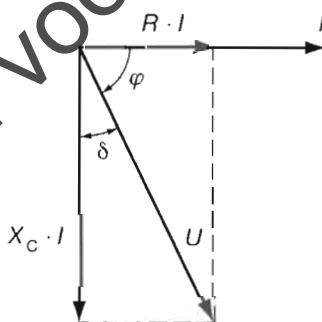


Fig. 4.20 Verlieshoek van een niet-ideale condensator

Het complement van de faseverschuivingshoek φ noemen we de verlieshoek δ van de condensator.

$$\text{Nu is } \tan \delta = \frac{R}{X_C} = R \cdot \omega \cdot C$$

4.6 Afstemkring van radio-ontvangers

Leerdoel

Hierna kan je:

- het gebruik van een LC-seriekring als afstemkring voor radio-ontvangers toelichten.

Bij een ontvangstantenne (figuur 4.21) induceren de elektromagnetische golven die de verschillende zendantennes uitzenden een spanning aan de uiteinden van de geleiders.

Aangezien op de plaats van een ontvangstantenne elektromagnetische velden van verschillende golflengte aanwezig zijn, zullen we door het veranderen van de capaciteit van de condensator C de LC-seriekring in resonantie brengen met de frequentie van de draaggolf die we willen ontvangen. Zo ontstaat over de spoel L de hoogste spanning.

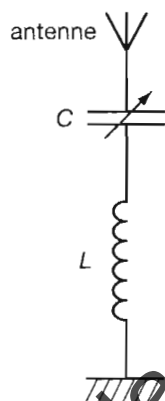


Fig. 4.21 Afstemkring van een radio-ontvanger

4.7 Voorbeelden

- 1 Een spoel met inductiecoëfficiënt $L = 0,2 \text{ H}$ en gelijkstroomweerstand $R = 80 \Omega$ is aangesloten op een wisselspanningsbron van 150 V met frequentie 120 Hz (figuur 4.22). Bereken de stroomsterkte, de impedantie en de faseverschuivingshoek tussen de aangelegde spanning en de bronstroom

Gegeven: $L = 0,2 \text{ H}$
 $R = 80 \Omega$
 $U = 150 \text{ V}$
 $f = 120 \text{ Hz}$

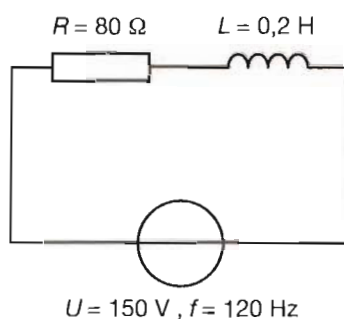


Fig. 4.22 Elektrisch schema bij voorbeeld 1

Gevraagd: I , Z en φ

Oplossing: Inductantie: $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 120 \cdot 0,2 = 150,8 \Omega$

$$\text{Impedantie: } Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{80^2 + 150,8^2} = 170,7 \Omega$$

$$\text{Stroomsterkte: } I = \frac{U}{Z} = \frac{150}{170,7} = 0,879 \text{ A}$$

Faseverschuiving:

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{150,8}{80} = 1,884$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\tan \varphi) = \tan^{-1}(1,884) = 62,0^\circ$$

Complexe oplossing:

Complexe uitdrukking van de impedantie: $\bar{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L = 80 + j150,8$

De modulus van de complexe uitdrukking van de impedantie:

$$Z = \sqrt{80^2 + 150,8^2} = 170,7 \Omega$$

Aangezien de spanning gegeven is, beschouwen we ze als referentiesinus,

$$\bar{U} = 150 + j0$$

De stroomsterkte wordt dan:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{150 + j0}{80 + j150,8} = 0,412 - j0,776 = 0,879 \text{ A } \angle -62^\circ$$

De faseverschuivingshoek wordt dan: $\varphi = \alpha_U - \alpha_I = 0 - (-62^\circ) = 62^\circ$

- 2 Bereken de stroomsterkte, de faseverschuiving en de impedantie van een wisselstroomkring met drie spoelen in serie aangesloten op een spanning van 100 V met $f = 50$ Hz. De kenmerken van de spoelen zijn:

$$L_1 = 0,03 \text{ H} - R_1 = 12 \Omega; L_2 = 0,06 \text{ H} - R_2 = 18 \Omega; L_3 = 0,1 \text{ H} - R_3 = 10 \Omega.$$

Gegeven: $U = 100 \text{ V}$ en $f = 50 \text{ Hz}$

Gevraagd: I , φ en Z

Oplossing:

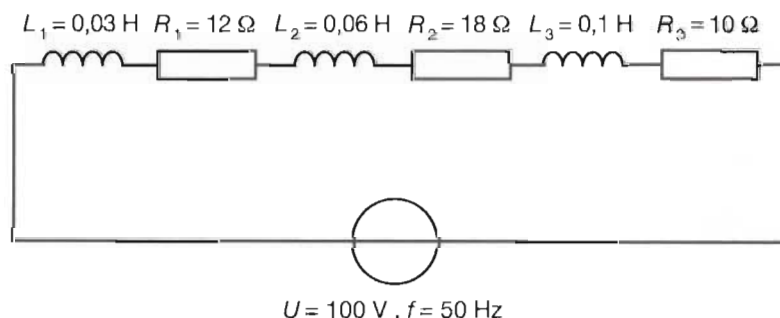


Fig. 4.23 Elektrisch schema bij voorbeeld 2

$$X_{L1} = \omega \cdot L_1 = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_1 = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,03 = 9,42 \, \Omega$$

$$X_{L2} = \omega \cdot L_2 = 18,85 \, \Omega$$

$$X_{L3} = \omega \cdot L_3 = 31,42 \, \Omega$$

De reactantie van de kring is de som van de reactanties van de spoelen:

$$X_{LV} = X_{L1} + X_{L2} + X_{L3} = 9,42 + 18,85 + 31,42 = 59,69 \, \Omega$$

De vervangingsweerstand van de kring is de som van de weerstanden van de spoelen:

$$R_V = R_1 + R_2 + R_3 = 12 + 18 + 10 = 40 \, \Omega$$

$$Z = \sqrt{R_V^2 + X_{LV}^2} = \sqrt{40^2 + 59,69^2} = 71,77 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{71,77} = 1,393 \, A$$

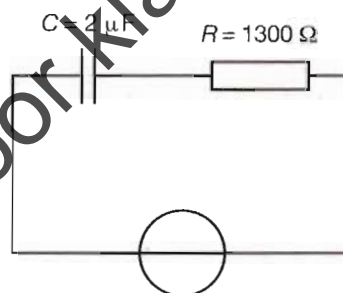
$$\tan \varphi = \frac{X_{LV}}{R_V} = 1,49225 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(1,49225) = 56,2^\circ$$

- 3 We schakelen een condensator van $2 \, \mu F$ in serie met een gelijkstroomweerstand van $1300 \, \Omega$ op een spanning van $230 \, V$ met frequentie $50 \, Hz$. Bereken de stroomsterkte, de impedantie en de faseverschuivingshoek φ .

Gegeven: $C = 2 \, \mu F$, $R = 1300 \, \Omega$, $U = 230 \, V$, $f = 50 \, Hz$

Gevraagd: I , Z en φ

Oplossing:



$U = 230 \, V$, $f = 50 \, Hz$

Fig. 4.24 Elektrisch schema bij voorbeeld 3

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f \cdot C)} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6})} = 1592 \, \Omega$$

$$Z = \sqrt{(R^2 + X_C^2)} = \sqrt{(1300^2 + 1592^2)} = 2055 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{2055} = 0,1119 \, A = 111,9 \, mA$$

$$\tan \varphi = \frac{-X_C}{R} = \frac{-1592}{1300} = -1,225 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-1,225) = -50,8^\circ$$

- 4 Een condensator van $1 \, \mu F$ is in serie geschakeld met een gelijkstroomweerstand van $5000 \, \Omega$ terwijl de stroomsterkte $20 \, mA$ bedraagt. Bereken de frequentie als de aangelegde spanning $130 \, V$ bedraagt.

Gegeven: $C = 1 \, \mu F$, $R = 5000 \, \Omega$, $I = 20 \, mA$, $U = 130 \, V$

Gevraagd: f

Oplossing:

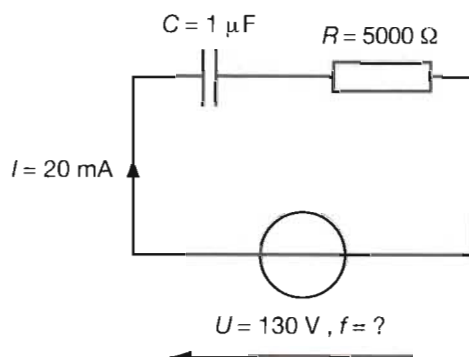


Fig. 4.25 Elektrisch schema bij voorbeeld 4

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{130}{20 \cdot 10^{-3}} = 6500 \, \Omega$$

$$Z^2 = R^2 + X_C^2$$

$$X_C = \sqrt{(Z^2 - R^2)} = \sqrt{(6500^2 - 5000^2)} = 4153 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{(\omega \cdot C)} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f \cdot C)} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot C \cdot X_C)} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 4153)} = 38,3 \, \text{Hz}$$

- 5 Een ideale spoel met een inductiecoëfficiënt $L = 0,14 \, \text{H}$ en een condensator van $8 \, \mu\text{F}$ staan in serie met een gelijkstroomweerstand van $10 \, \Omega$ op een spanning van $230 \, \text{V}$ met frequentie $50 \, \text{Hz}$. Bereken de impedantie, de stroomsterkte, de faseverschuiving en de deelspanningen U_L , U_C en U_R .

Gegeven: $L = 0,14 \, \text{H}$, $C = 8 \, \mu\text{F}$, $R = 10 \, \Omega$, $U = 230 \, \text{V}$, $f = 50 \, \text{Hz}$

Gevraagd: Z , I , φ , U_L , U_C , U_R

Oplossing:

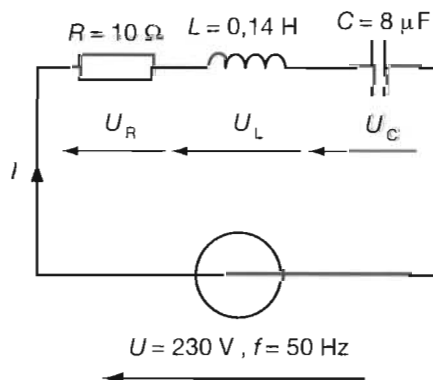


Fig. 4.26 Elektrisch schema bij voorbeeld 5

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,14 = 44,0 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 398 \, \Omega$$

$$Z = \sqrt{(R^2 + (X_L - X_C)^2)} = \sqrt{(10^2 + (-354)^2)} = 354 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{354} = 0,650 \text{ A}$$

$$\tan \varphi = \frac{-354}{10} = -35,4 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-35,4) = 88,4^\circ$$

$$U_L = X_L \cdot I = 44,0 \times 0,650 = 28,6 \text{ V}$$

$$U_C = X_C \cdot I = 398 \times 0,650 = 259 \text{ V}$$

$$U_R = R \cdot I = 10 \times 0,650 = 6,50 \text{ V}$$

- 6 Bereken in voorbeeld 5 de frequentie waarvoor resonantie optreedt. Hoe groot is de spanning over de spoel en de condensator bij resonantie?

$$\text{Oplossing: } f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,14 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}} = 150,4 \text{ Hz}$$

$$I_r = \frac{U}{R} = \frac{230}{10} = 23 \text{ A}$$

$$U_C = I X_C = I \cdot \frac{1}{\omega C} = s. \frac{1}{2\pi f C}$$

$$= 23 \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 150,4 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 3,04 \text{ k}\Omega$$

$$U_L = I X_L = I \cdot 2\pi f L = 23 \cdot 2\pi \cdot 150,4 \cdot 0,14 = 3,04 \text{ k}\Omega$$

Door de wijziging van de frequentie is de stroomsterkte in vergelijking met voorbeeld 5 veel groter geworden, terwijl de deelspanningen over de spoel en de condensator gevaarlijk hoog zijn.

4.8 Opdrachten

- 1 Een smoorspoel met een inductiecoëfficiënt $L = 2 \text{ H}$ veroorzaakt een faseverschuivingshoek van 30° als we ze aansluiten op een spanningsbron met frequentie 50 Hz . Bereken de gelijkstroomweerstand en de impedantie van de smoorspoel.
- 2 Een spoel met $R = 1 \Omega$ en $L = 8 \text{ mH}$ veroorzaakt een faseverschuiving van 25° tussen aangelegde spanning en bronstroom. Bereken de frequentie van de spanningsbron en de impedantie van de spoel.
- 3 Een condensator van $1,2 \mu\text{F}$ in serie met een weerstand van 360Ω is aangesloten op een spanningsbron van 40 V met frequentie 1000 Hz . Bereken de impedantie en de stroomsterkte van de seriekring.
- 4 Een condensator $C = 12 \mu\text{F}$ en een spoel met inductiecoëfficiënt $L = 120 \text{ mH}$ zijn in serie geschakeld met een weerstand $R = 480 \Omega$ op een spanning van 180 V met frequentie 60 Hz . Bereken de stroomsterkte, de impedantie, de faseverschuivingshoek en de deelspanningen U_L , U_C en U_R .
- 5 Bereken voor de gegevens uit opdracht 4 de resonantiefrequentie, de spanning over de spoel en de condensator bij resonantie.



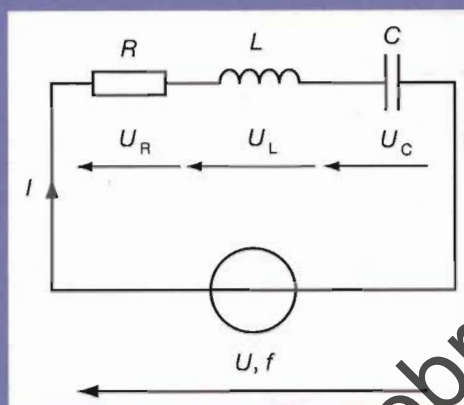
Op de cd-rom vind je een diagnostische toets en extra taken.

SYNTHESE

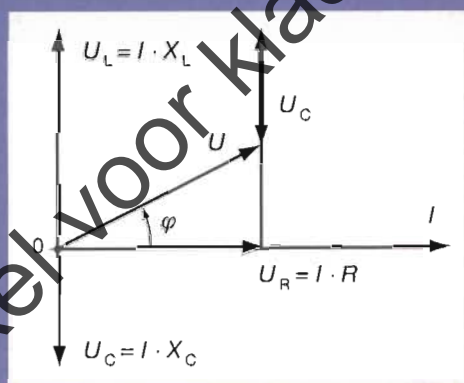
Serieschakeling

1 Formules voor impedantie en faseverschuiving

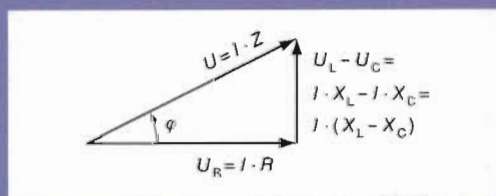
De meest complexe seriekring aangesloten op wisselstroom kunnen we altijd herleiden tot de serieschakeling van een zuiver ohmse, een zuiver inductieve en zuiver capacitieve component, die we kortweg een **RLC-seriekring** noemen.



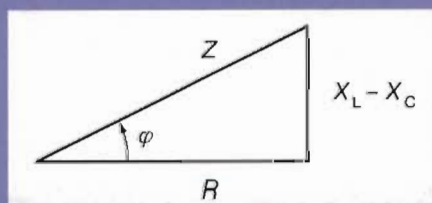
De formules voor de impedantie en de faseverschuiving ¹ stellen we op door redenering uitgaande van de stroom.



Uit het vectorendiagram leiden we de **spanningsdriehoek** af.



Uit de spanningsdriehoek leiden we de **impedantiedriehoek** af.



Uit de impedantiedriehoek leiden we de formule voor de impedantie af met behulp van de stelling van Pythagoras.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\Omega)$$

Uit de impedantiedriehoek leiden we de formules voor de faseverschuivingshoek af met behulp van de goniometrische getallen.

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{X_L - X_C}{Z} \quad \varphi = \cos^{-1} \frac{R}{Z} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$$

Anders samengestelde seriekringen bekomen we door een component in de RLC-seriekring niet te gebruiken. In het schema van de RLC-seriekring betekent dit dat we de component die we niet gebruiken, vervangen door een geleider. De formules voor de impedantie en de faseverschuiving in de gewenste kring bekomen we door de impedantie van de niet gebruikte component in de formules van de RLC-seriekring gelijk te stellen aan nul.

2 De complexe rekenwijze

In een seriekring op wisselspanning is de complexe uitdrukking van de vervangingsimpedantie de som van de complexe uitdrukking van de deelimpedanties.

De complexe rekenwijze is echter maar efficiënt toe te passen als je beschikt over een tool waarmee je complex kan rekenen (een rekenblad op de PC of een 'grafisch' rekentoestel).

3 Frequentiegedrag van de RLC-seriekring

Als $X_C > X_L$ gedraagt de kring zich capacitief, $\varphi < 0$

Als $X_C < X_L$ gedraagt de kring zich inductief, $\varphi > 0$

Als $X_C = X_L$ gedraagt de kring zich omis en treedt resonantie op, $\varphi = 0$

De RLC-seriekring is een voorbeeld van een banddoorlaatfilter.

De inductiecoëfficiënt en de capaciteit bepalen de resonantiefrequentie, f_r .

$$f_r = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

De stroomsterkte is maximaal als de frequentie van de aangelegde spanning gelijk is aan de resonantiefrequentie.

De bandbreedte B is recht evenredig en de kwaliteitsfactor Q is omgekeerd evenredig met de weerstand.

4 De serieschakeling vindt toepassing bij:

- de praktische spoel
- tl-schakeling met smoorspoel en tl-schakeling met seriecompensatie
- RC-seriekring als laagdoorlaatfilter
- RC-seriekring als hoogdoorlaatfilter
- de elektronische regelaar bij procesregeltechniek
- de studie i.v.m. de verlieshoek van een condensator
- de afstemkring voor radio-ontvangers.

Enkel voor klasgebruik