

De sinusvormige wisselspanning

WEGWIJZER

Leereenheid 1 verduidelijkte en onderscheidde begrippen zoals spanning, potentiaal, potentiaalverschil, massa, referentiepotentiaal, blokvormige gelijkspanning en wisselspanning. Van de blokvormige wisselspanning berekenden we de gemiddelde en effectieve waarde. Nu weten we dat de distributie van elektrische energie d.m.v. sinusvormige wisselspanningen gebeurt. In deze leereenheid zal de sinusvormige wisselspanning daarom bijzondere aandacht krijgen.

Bij de aanvang van deze leereenheid tonen we op twee manieren aan dat een eenvoudige proefopstelling ons een sinusvormige wisselspanning oplevert. Het verloop van de sinusvormige spanning registreren we met een oscilloscoop in een spanning-tijd-diagram.

Om uiteindelijk te komen tot de wiskundige uitdrukkingen van sinusvormig veranderlijke grootheden bespreken we de fase, de periode, de frequentie, de pulsatie en de faseverschuiving.

Sinusvormige grootheden voorstellen is zeer tijdrovend, veelal onnauwkeurig en onoverzichtelijk. Maar we kunnen ze ook vectorieel voorstellen.

Met behulp van de complexe rekenwijze kunnen we vervolgens bewerkingen met vectoren wiskundig zeer nauwkeurig uitvoeren.

Uit het spanning-tijd-diagram bepalen we ogenblikkelijke waarden en de maximale waarde. Een universele meter op meetstand AC meet de effectieve waarde. Met een voorbeeld van de Fourieranalyse tonen we het verband tussen de symmetrische blokvormige gelijkspanning en de sinusvormige wisselspanning aan. Het geeft ons een idee van de samenhang tussen gemiddelde waarde, grondgolf en de harmonischen.

De spanning op het voedingsnet is een sinusvormige wisselspanning. Elektronische schakelingen werken echter veelal op gelijkspanning. Een nadelig gevolg daarvan is dat een elektronisch toestel moet beschikken over een voeding waarin de sinusvormige netspanning omgezet wordt in een constante gelijkspanning. De omvorming van een sinusvormige wisselspanning naar een constante gelijkspanning wordt in leereenheid 2 niet behandeld. De gelijkrichtertheorie vormt een apart studieobject binnen de elektrotechniek.

Na de studie van LE2 zijn we klaar om een elektrische stroomkring, gevoed met sinusvormige wisselspanning, te analyseren.

2.1 Opwekken van een sinusvormige wisselspanning

2.1.1 Gegeneerde spanning over een geleider die een cirkelvormige beweging uitvoert in een homogeen magnetisch veld

Leerdoel

Hierna kan je:

- het opwekken van een wisselspanning verklaren en de werkelijke oorzaak van het ontstaan van die wisselspanning toelichten aan de hand van een rechte geleider die beweegt in een magnetisch veld.

In leereenheid 4 van leerboek A-2 hebben we aangetoond dat een spanning gegenereerd wordt in een rechte geleider zodra de geleider de veldlijnen snijdt.

Figuur 2.1 stelt een eenvoudige wisselstroomgenerator voor. Tussen de polen van de magneet heerst een homogeen magnetisch veld met magnetische inductie B .

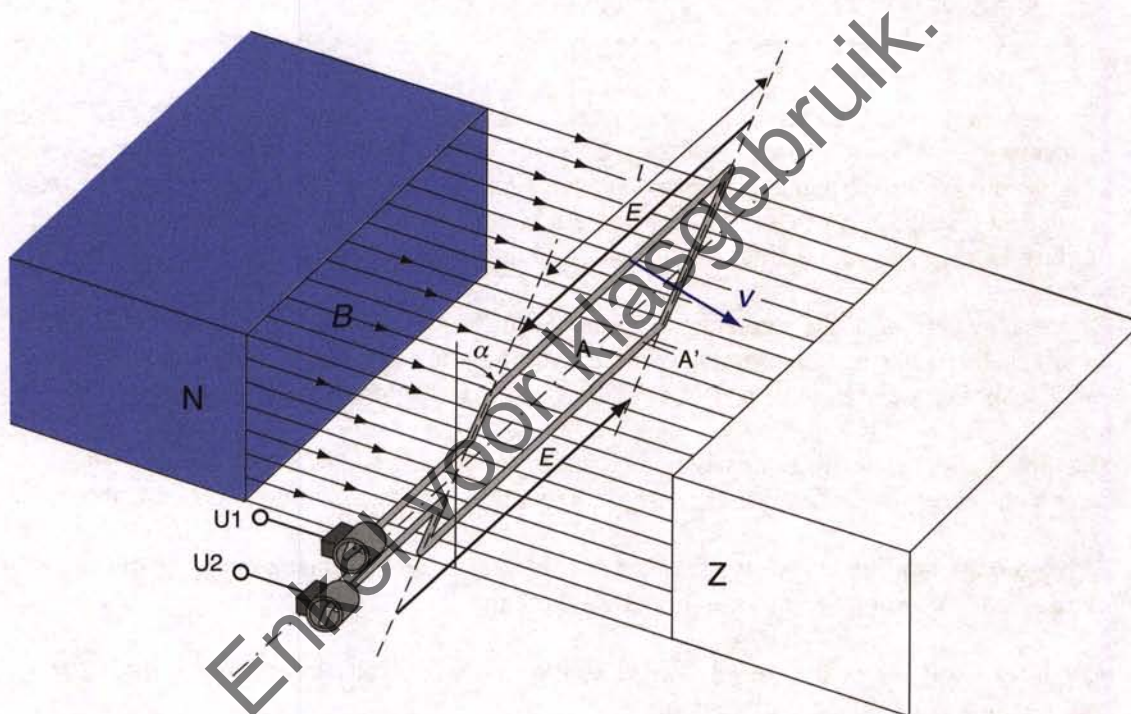


Fig. 2.1 Voorstelling van een eenvoudige wisselstroomgenerator in 3-D

Als de generator met een constante rotatiefrequentie (snelheid) in wijzerzin aangedreven wordt, draait het raam en voeren de geleiders A en A' van het rechthoekige draadraam een draaiende beweging uit in het magnetisch veld. De beweging vangt bijvoorbeeld aan als het raam verticaal staat ($t = 0$; dit is in het neutrale vlak van de magneet) met geleider A bovenaan en geleider A' onderaan. De snelheidsvector $\vec{v}$ is op elk ogenblik rakend aan de cirkelvormige beweging.

In figuur 2.2 ontbinden we de snelheidsvector $\vec{v}$ in twee loodrechte componenten: $\vec{v}'$ loodrecht op de richting van de veldlijnen en $\vec{v}''$ evenwijdig aan de veldlijnen. De component $\vec{v}'$ stelt de snelheid voor waarmee elke geleider de veldlijnen loodrecht snijdt. De grootte van v' is afhankelijk van de hoek α , waarover het raam verdraaid is.

$$v' = v \cdot \sin \alpha$$

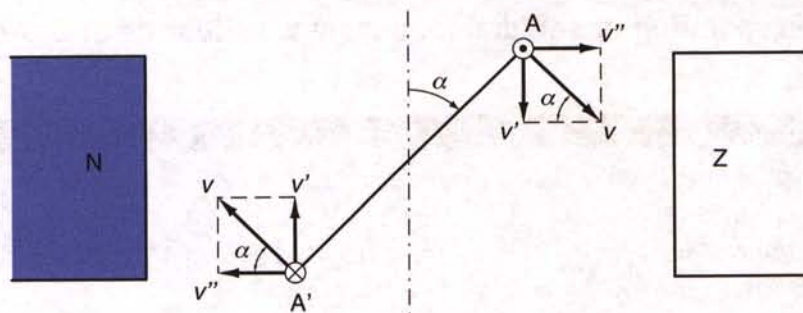


Fig. 2.2 Snelheid waarmee de geleiders de veldlijnen snijden

Over elke geleider ontstaat op elk ogenblik een gegenereerde spanning

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha$$

De zin van de gegenereerde spanning over de geleiders bepalen we met de rechterhandregel aan de hand van de zin van de veldlijnen (buiten de magneet van noord naar zuid) en de zin van de snelheidsvector $\vec{v}$.

De zin van de spanning in geleiders A en A' is zodanig dat hun spanning wordt samengevoegd, ze staan m.a.w. in serie. De in de generator gegenereerde spanning is gelijk aan:

$$e = 2 \cdot B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha$$

De gegenereerde spanning is maximaal als het raam horizontaal staat (dit is op de poolas van de magneet), dus als α gelijk is aan 90° of 270° en $|\sin \alpha| = 1$.

De maximale waarde is dan $E_m = 2 \cdot B \cdot l \cdot v$.

Algemeen kunnen we besluiten dat de gegenereerde spanning in een draaiend raam evenredig wijzigt met de sinus van de beschouwde hoek α .

Wiskundig uitgedrukt: $e = E_m \cdot \sin \alpha$

met

E_m maximale waarde van de gegenereerde spanning in volt

α de hoek die het raam maakt met het neutrale vlak van de magneet in graden of radialen

De hoek waarvan we sinus berekenen noemen we 'de fase' van de spanning.

Toelichting

Gebruik van sleepringen en koolstofborstels

De spanning wordt van het draaiende draadraam afgenomen met twee sleepringen, waarop koolstofborstels rusten. De koolstofborstels zijn verbonden met de klemmen U1 en U2 van het klemmenbord van de generator.

2.1.2 Gegeneerde spanning in een draaiend raam waardoor de omsloten flux verandert

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de noodzaak van het onderzoek naar het begrip 'de omsloten fluxverandering' aantonen.
- de omsloten flux van een raam in een willekeurige stand bepalen.
- het verloop van de omsloten flux in overeenstemming met de stand van het raam weer-geven in een assenstelsel.
- de snelheid van de fluxverandering uit het verloop van de omsloten flux afleiden.
- het verband tussen de gegeneerde spanning en de snelheid van de fluxverandering verduidelijken.

In leereenheid 4 van leerboek A-2 hebben we aangetoond dat een gegeneerde spanning maar kan ontstaan als de omsloten flux in een winding verandert. Dit principe passen we toe op het draadraam van de generator in figuur 2.1. In figuur 2.3 zie je duidelijk dat de stand van het draadraam wijzigt tegenover de richting van de veldlijnen als de generator aangedreven wordt.

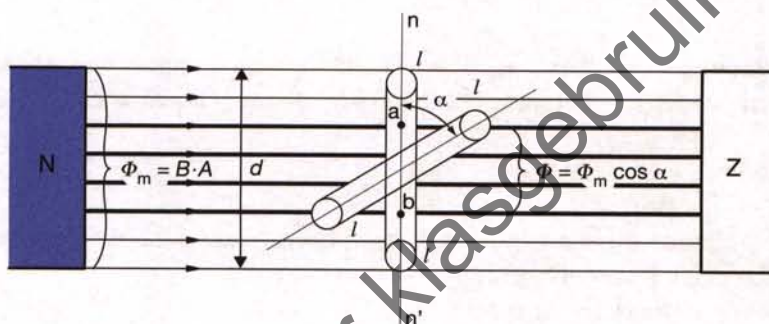


Fig. 2.3 Omsloten flux door een draaiend draadraam

In de verticale stand ($\alpha = 0$) van het draadraam is de flux omsloten door dit raam, m.a.w. de omsloten flux maximaal.

$$\phi_m = B \cdot A = B \cdot l \cdot d$$

met

- ϕ_m de maximale omsloten flux in weber (Wb)
- B de inductie of fluxdichtheid in T of Wb/m²
- A de oppervlakte van het raam in m² ($A = l \cdot d$)

Wanneer het raam over een hoek α verdraait tegenover de neutrale lijn nn' , dan omsluit het raam minder flux, namelijk:

$$\phi = B \cdot A' = B \cdot l \cdot ab = B \cdot l \cdot d \cdot \cos \alpha = \phi_m \cdot \cos \alpha$$

De omsloten flux in een draaiend raam verloopt volgens een cosinusfunctie.

In figuur 2.4 geeft curve 1 het verloop van de omsloten flux weer voor de verschillende standen van het raam. Voor de standen van 0° tot 90° en 270° tot 360° is de flux door het raam omvat, tegengesteld aan de flux door het raam voor de standen tussen 90° en 270° omdat de veldlijnen langs de andere zijde van het raam intreden.

Uit het verloop van de flux op figuur 2.4 kunnen we de fluxverandering bij elke stand van het raam afleiden. Om de grootte van de fluxverandering te bepalen, beschouwen we de stand van het raam om de 30°. De fluxverandering bij een bepaalde stand van het raam is de flux bij de volgende stand min de flux bij de vorige stand.

$$\Delta \phi_{\alpha} = \phi_{\alpha+30} - \phi_{\alpha-30}$$

Het resultaat van de berekening geven we weer in tabel 2.1.

In figuur 2.4 geeft curve 3 het verloop van de fluxverandering weer voor de verschillende standen van het raam. In de stand van het raam waarbij de omsloten flux maximaal is, verandert de flux niet want de flux is even groot in de volgende als in de vorige stand. In de stand van het raam waarbij de omsloten flux nul is een daarna positief wordt (dit noemen we een positieve nuldoorgang van de flux) is de fluxverandering maximaal en positief. In de stand van het raam waarbij de flux nul is een daarna negatief wordt (dit noemen we een negatieve nuldoorgang van de flux) is de fluxverandering maximaal en negatief.

$\alpha (^{\circ})$	ϕ	$\Delta \phi$
0	$1,000 \cdot \phi_m$	0
30	$0,866 \cdot \phi_m$	$-0,500 \cdot \phi_m$
60	$0,500 \cdot \phi_m$	$-0,866 \cdot \phi_m$
90	0	$-1,000 \cdot \phi_m$
120	$-0,500 \cdot \phi_m$	$-0,866 \cdot \phi_m$
150	$-0,866 \cdot \phi_m$	$-0,500 \cdot \phi_m$
180	$-1,000 \cdot \phi_m$	0
210	$-0,866 \cdot \phi_m$	$0,500 \cdot \phi_m$
240	$-0,500 \cdot \phi_m$	$0,866 \cdot \phi_m$
270	0	$1,000 \cdot \phi_m$
300	$0,500 \cdot \phi_m$	$0,866 \cdot \phi_m$
330	$0,866 \cdot \phi_m$	$0,500 \cdot \phi_m$
360	$1,000 \cdot \phi_m$	0

Tabel 2.1 Berekenen van de fluxverandering

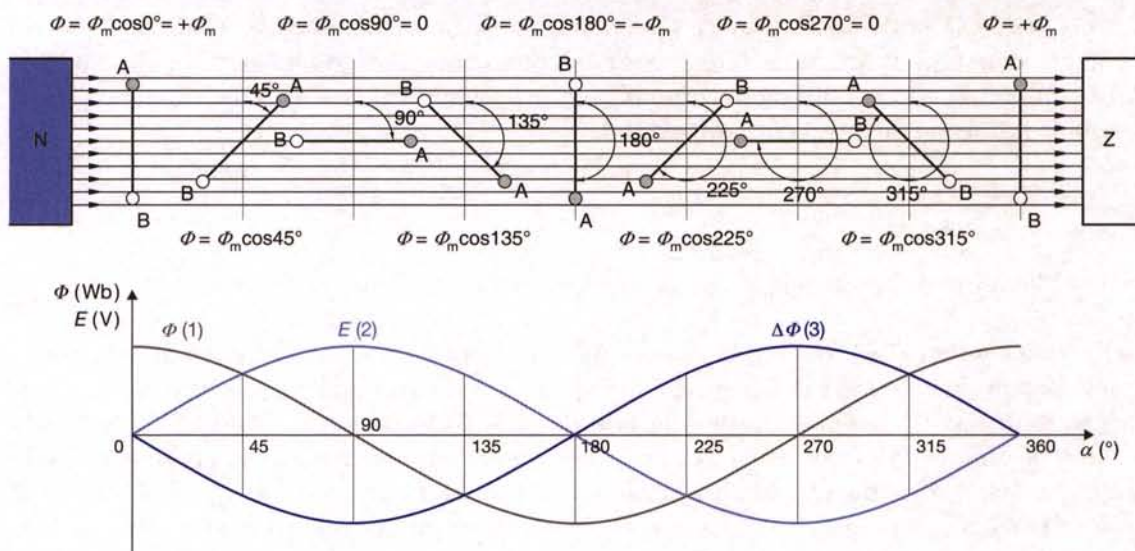


Fig. 2.4 Verband tussen de stand van het raam, de flux, de fluxverandering en de gegenereerde spanning

Uit leereenheid 4 van leerboek A-2 weten we dat de ogenblikkelijke waarde van de gegenereerde spanning in het draadraam gelijk is aan:

$$e = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t} (\text{V})$$

Aangezien een draadraam maar 1 enkele winding vormt, mogen we stellen dat de gegenereerde spanning bepaald wordt door de snelheid van de omsloten fluxverandering.

$$e = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} (\text{V})$$

De zin van de spanning is zodanig dat ze haar ontstaansoorzaak ($\Delta\phi$) tegenwerkt.

Uit figuur 2.4 blijkt dat de flux gedurende elke omwenteling van het raam dezelfde cyclus doorloopt en dat een volledige omwenteling (360°) overeenstemt met de periode (T) van de flux. Aangezien we de fluxverandering telkens bepalen voor een verdraaiing van 60° , is Δt in de formule voor het berekenen van de gegenereerde spanning gelijk aan $T/6$. De gegenereerde spanning is dus voor elke stand van het raam evenredig met, maar tegengesteld aan de fluxverandering.

In figuur 2.4 geeft curve 2 het verloop van de gegenereerde spanning weer voor de verschillende standen van het raam.

Zo kunnen we ook besluiten dat de gegenereerde spanning van een eenvoudige generator evenredig wijzigt met de sinus van de beschouwde hoek α .



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het genereren van een sinusvormige spanning.

2.2 Spanning-tijd-diagram van een sinusvormige spanning

2.2.1 Fase in graden

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de grafiek van een sinusvormige spanning schetsen met de fase in graden.
- aantonen dat een sinusvormige spanning een wisselspanning is.

Uit de verschillende benaderingen in 2.1 blijkt telkens dat de opgewekte spanning van een eenvoudige generator evenredig wijzigt met de sinus van een hoek α . De hoek α noemen we de fase van de spanning.

$$e = E_m \cdot \sin \alpha$$

Hoewel de mechanische constructie van een wisselstroomgenerator in de loop der tijden grondig wijzigde, is het verloop van de sinusvormig gegenereerde spanning van moderne wisselstroomgeneratoren die het verbruikersnet voeden niet gewijzigd.

In figuur 2.5 stellen we $E = f(\alpha)$ voor.

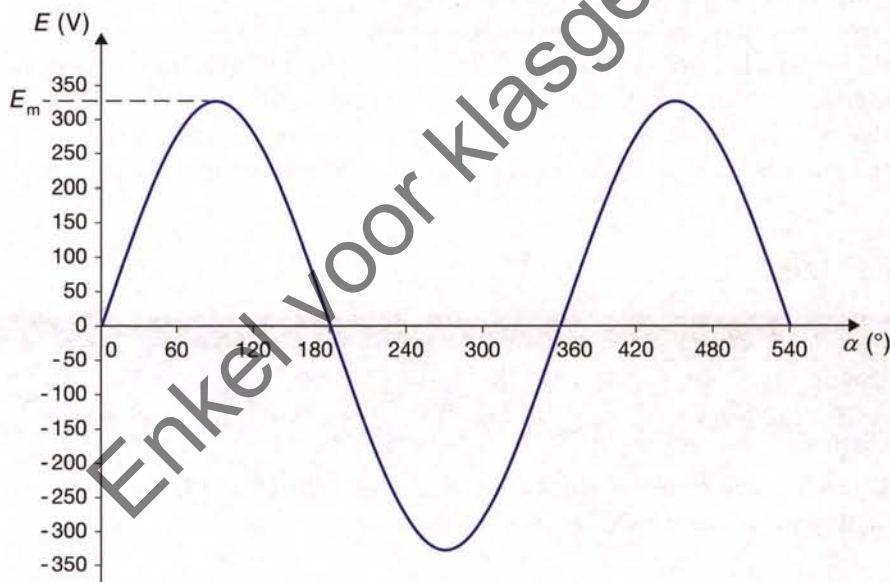


Fig. 2.5 Grafiek van een sinusvormige spanning met de fase in graden

In figuur 2.6 stellen we de wiskundige sinusfunctie voor in functie van de hoek α .

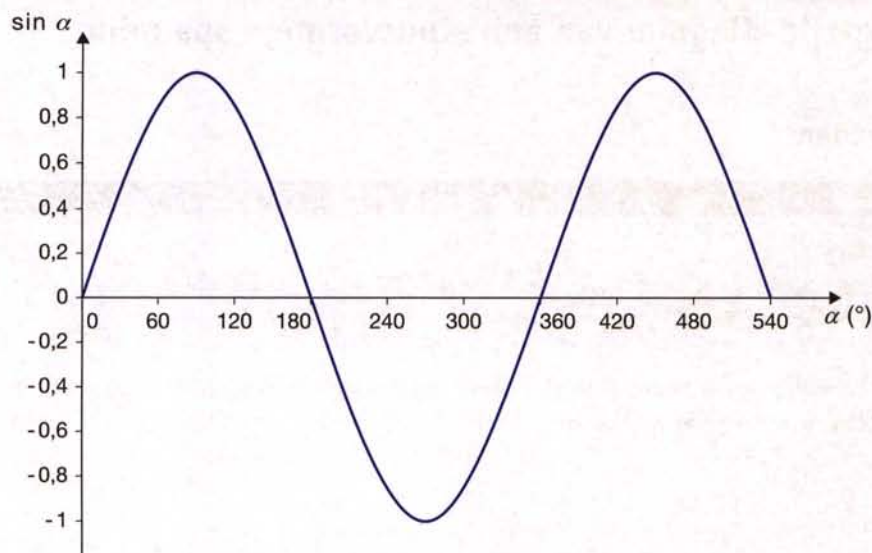


Fig. 2.6 Grafiek van de wiskundige sinusfunctie

De spanning op het verbruikersnet verloopt evenredig met de wiskundige sinusfunctie. We spreken van een sinusvormige of sinusoidale spanning.

De sinusvormige spanning is een wisselspanning, want:

- ze heeft zowel positieve als negatieve momentele waarden;
- ze is periodiek; als het draadraam een volledige omwenteling maakt, heeft de spanning een waardenverloop (cyclus) dat elke omwenteling herhaald wordt;
- de gemiddelde waarde over het verloop van een cyclus van de spanning is nul; bij elke positieve momentele waarde kunnen we een even grote negatieve waarde optellen.

2.2.2 Fase in radialen

Leerdoel

Hierna kan je:

- in de grafiek van een sinusvormige spanning de fase uitdrukken in radialen.

Als eenheid voor de hoek kunnen we ook de radiaal (rad) gebruiken. Op de X-as stemt 180° dan overeen met π rad (figuur 2.7).

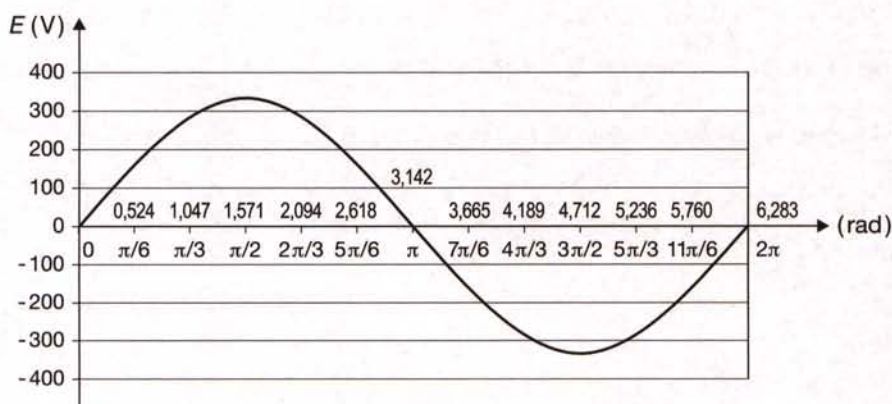


Fig. 2.7 Grafiek van een sinusvormige spanning met de fase in radialen

2.2.3 Begrippenkader i.v.m. de sinusvormige wisselspanning

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het verband tussen de fase en de tijd toelichten.
- de wiskundige vergelijking van een sinusvormige spanning schrijven met de fase in graden en radialen.
- het begrip pulsatie toelichten.
- de pulsatie van een sinusvormige spanning berekenen.
- het spanning-tijd-diagram van een sinusvormige spanning bij een gegeven frequentie schetsen.
- de periode van een periodiek verschijnsel nauwkeurig definiëren.
- het begrip positieve en negatieve alternantie onderscheiden.

a Fase en tijd

De tijd die nodig is voor een volledige omwenteling van het draadraam is de periode T in seconden van de sinusvormige spanning.

Een periode, T (s) stemt overeen met 360° of 2π rad.

Een seconde stemt dan overeen met $(360/T)^\circ$ of $(2\pi/T)$ rad.

In een tijd van t (s) verdraait het raam $\frac{360 \cdot t}{T}^\circ$ of $\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot t$ rad.

b Wiskundige vergelijking

Als de fase uitgedrukt wordt in graden, wordt de vergelijking van de sinusvormige spanning:

$$e = E_m \cdot \sin\left(\frac{360 \cdot t}{T}\right)$$

Als de fase uitgedrukt wordt in radialen, wordt de vergelijking van de sinusvormige spanning:

$$e = E_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

c Pulsatie

$\frac{2\pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$ wordt uitgedrukt in radialen per seconde (rad/s) en noemen we de elektrische hoeksnelheid, de cirkelfrequentie of de pulsatie.

De pulsatie stellen we voor door ω (de Griekse kleine letter omega).

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \text{ (rad/s)}$$

met

f de frequentie in Hz = /s = s⁻¹
 T de periode in s

De wiskundige uitdrukking van de spanning wordt dan als volgt:

$$e = E_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

d Het spanning-tijd-diagram van een sinusvormige spanning met frequentie f

De sinusvormige spanning heeft op elk ogenblik een momentele waarde, $e = f(t)$, en we kunnen ze voorstellen in een spanning-tijd-diagram.

De verdeling van elektrische energie gebeurt in Europa met een frequentie van 50 Hz en in Amerika met 60 Hz.

In Europa is de periode van de netspanning:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} \text{ s} = \frac{20}{1000} \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

Het spanning-tijd-diagram van een in Europa gebruikte netspanning wordt voorgesteld in figuur 2.8.

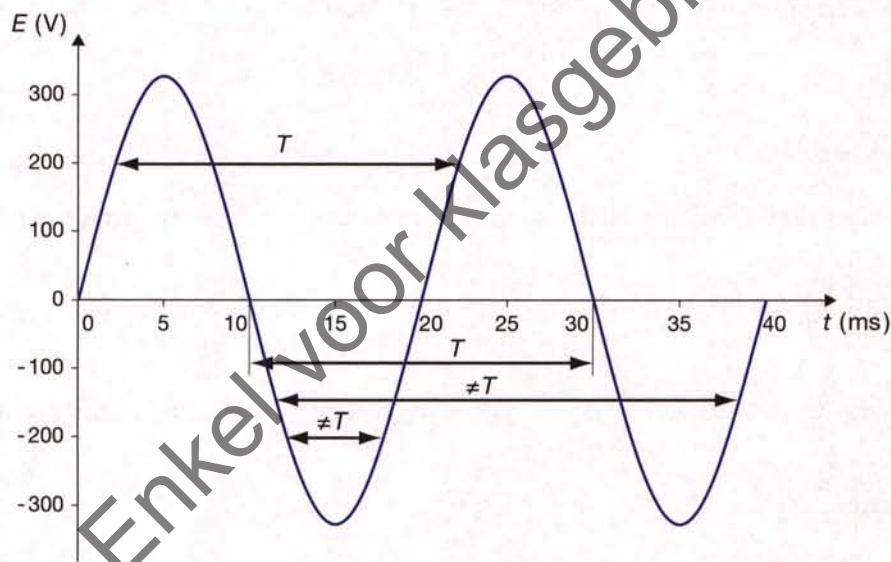


Fig. 2.8 Spanning-tijd-diagram van een Europese netspanning

e Definitie periode

Uit figuur 2.8 kunnen we een nauwkeurige definitie van een periode afleiden.

De periode van een spanning of stroom is het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende tijdstippen met dezelfde ogenblikkelijke waarde, waartussen hetzelfde waardenverloop geldt als erna.

f Alternantie

De halve cyclus waarbij de ogenblikkelijke waarden positief zijn noemen we de positieve alternantie, de andere helft van de cyclus noemen we de negatieve alternantie.

Toelichting

Wisselstroomgeneratoren met meerdere polenparen

Naast de generator met 1 noordpool en 1 zuidpool of de generator met 1 polenpaar bestaan er ook generatoren met meerdere polenparen. Bij die generatoren worden in 1 omwenteling van het draadraam meerdere cycli van de opgewekte spanning doorlopen. Ze worden gebruikt om een spanning met dezelfde frequentie op te wekken bij een lagere rotatiefrequentie (toerental) van de aandrijvende machine. De volledige bespreking ervan is stof voor een boek over wisselstroommachines.

2.3 Faseverschuiving

2.3.1 Triggeren van een oscilloscoop

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het begrip referentiesinus toelichten.
- het triggerniveau en de triggerhelling aanduiden op een oscilloscoopbeeld.
- het begrip faseverschuiving en faseverschil toelichten.

Tot nu toe hebben we een sinusvormige spanning beschreven die op $t = 0$, nul is ($e = 0$) en daarna stijgt. Een dergelijke sinusvormige spanning noemen we een referentiesinus.

Als we het spanning-tijd-diagram van de netspanning opnemen, weten we niet onder welke hoek het draadraam in de generator in de centrale op een bepaald ogenblik staat.

De oorsprong van het spanning-tijd-diagram ($t = 0$) wordt bepaald door de triggering van de oscilloscoop. Triggeren is afgeleid van het Engelse woord 'the trigger', dat de trekker van een vuurwapen betekent. De triggerschakeling start de tijdbasis van de oscilloscoop als een op te nemen signaal een bepaalde waarde (het triggerniveau) met een bepaalde helling (de triggerhelling) overschrijdt. Door het triggerniveau te wijzigen verschuift de grafiek in horizontale richting. Door de verschuiving van de grafiek wijzigt de fase van de sinusvormige spanning (figuur 2.9).

Als sinusvormige grootheden met dezelfde frequentie verschuiven, ontstaat er een constant faseverschil tussen de grootheden.

Het faseverschil noemen we meestal de faseverschuiving. De faseverschuiving stellen we voor door φ (de Griekse kleine letter phi) en drukken we uit in graden of radialen.

2.3.2 Bepalen van de faseverschuiving

Leerdoel

Hierna kan je:

- de faseverschuiving bepalen tussen een sinusvormige spanning en de referentiesinus op een oscilloscoopbeeld.

De faseverschuiving bepalen we tussen gelijknamige nulpunten (positieve of negatieve nuldoorgangen) of gelijknamige (positieve of negatieve) maxima van de beschouwde spanningen. De bepaling aan de hand van maxima is minder nauwkeurig omdat de raaklijn aan de top van de sinuslijn horizontaal is.

Figuur 2.9 toont de referentiesinus (lichtblauwe lijn) en een sinusvormige spanning met dezelfde periode en maximale waarde (donkerblauwe lijn) die haar gelijknamige maxima en nulpunten later bereikt (meer naar rechts op de tijdas) dan de referentiesinus. We zeggen: de spanning ijlt na op de referentiesinus.

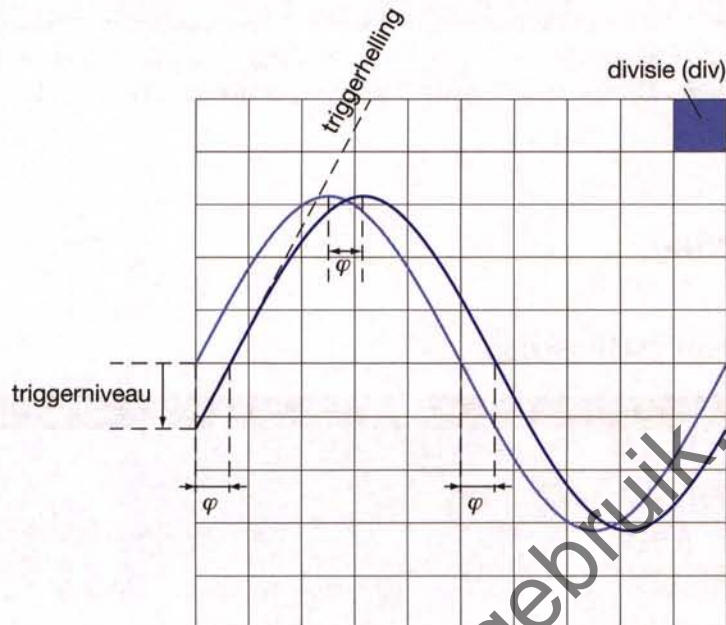


Fig. 2.9 Oscilloscoopbeeld van een spanning die najlt op de referentiesinus.

De rasterlijnen verdelen het scherm van de oscilloscoop in vakjes, die we divisies noemen. Op de figuur zien we dat een cyclus verloopt over de volledige schermbreedte van 10 divisies. Een volledige periode stemt overeen met 10 divisies of 360° . De faseverschuiving van de beschouwde spanning tegenover de referentiesinus is dan:

$$\varphi = 0,8 \text{ div} \cdot \frac{360^\circ}{10 \text{ div}} = 28,8^\circ \approx 30^\circ$$

De ogenblikkelijke waarde van de beschouwde spanning is op $t = 0$ negatief. Dit betekent dat de fase op dit ogenblik negatief is. Bij een najlende sinusvormige spanning moeten we de faseverschuiving aftrekken van de fase van de referentiesinus.

De wiskundige uitdrukking van de beschouwde spanning wordt dan:

$$u = U_m \cdot \sin \left(\frac{360 \cdot t}{T} - 30 \right)$$

als we de fase uitdrukken in graden, of

$$u = U_m \cdot \sin \left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6} \right)$$

als we de fase uitdrukken in radialen.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het opnemen van het spanning-tijd-diagram van een referentiesinus.

2.4 Vectoriële voorstelling van sinusvormige grootheden

2.4.1 Definities

Leerdoel

Hierna kan je:

- een referentiesinus voorstellen door een draaiende vector.

De sinusvormige voorstelling is vooral bij meerdere sinusvormige grootheden tijdrovend, onnauwkeurig en onoverzichtelijk. We kunnen een sinusvormige grootheid eenvoudiger voorstellen en wel door een draaiende vector.

In figuur 2.10 stellen we de referentiesinus voor door een vector:

- die aangrijpt in de oorsprong (0) van het vlak;
- met lengte gelijk aan de maximale waarde U_m ;
- die draait met constante hoeksnelheid ω in tegenwijzerzin, vertrekkend vanaf de referentiestand, zijnde horizontaal en naar rechts gericht.

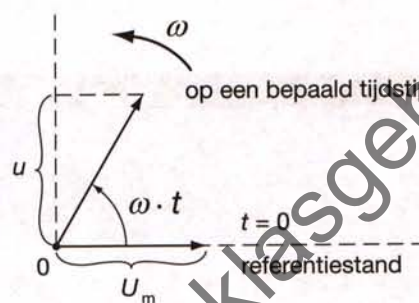


Fig. 2.10 Vectoriële voorstelling van een referentiesinus

In figuur 2.10 is een spanningsvector voorgesteld op $t = 0$ in de referentiestand. Na een bepaalde tijd is de vector, die draait met constante hoeksnelheid of pulsatie ω , verdraaid over een hoek: hoeksnelheid $\times$ tijd $= \omega \cdot t$.

De projectie van het uiteinde van de vector op de verticale as is op dit ogenblik gelijk aan de ogenblikkelijke of momentele waarde van de spanning, $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

2.4.2 Verband tussen de vectoriële en de sinusvormige voorstelling

Leerdoel

Hierna kan je:

- het verband tussen de vectoriële en de sinusvormige voorstelling van een sinusvormige wisselstroom toelichten.

In figuur 2.11 stellen we de vector $\vec{oa}$ (met lengte I_m) voor, die met hoeksnelheid ω in tegenwijzerzin draait. Hij zal dus een omwenteling maken gedurende een periode T . Op dezelfde hoogte brengen we een I - t -assenstelsel aan. Voor elke stand van de vector zetten we in het assenstelsel de overeenstemmende hoek α en de momentele waarde i uit. Na een volledige omwenteling van de vector zien we in het assenstelsel een zuivere sinusvorm met periode T verschijnen.

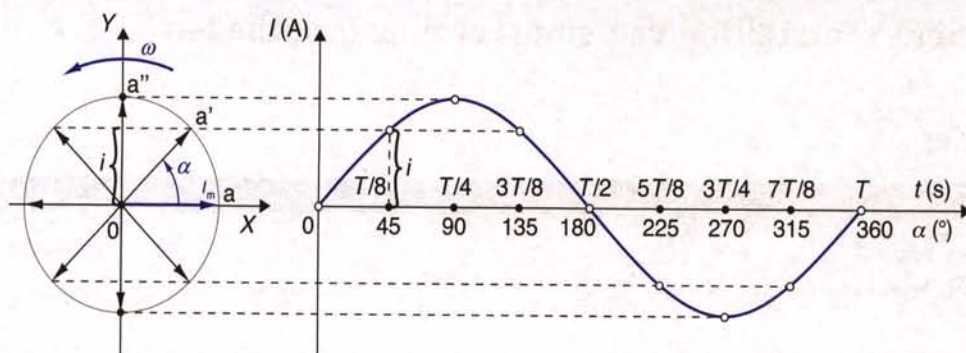


Fig. 2.11 Verband tussen de vectoriële en de sinusvormige voorstelling

De wiskundige uitdrukking bij deze draaiende vector duidt op het sinusvormig verloop van de stroomsterkte, nl.

$$i = I_m \cdot \sin \alpha \text{ of } i = I_m \cdot \sin (\omega \cdot t)$$

2.4.3 Vectorendiagram

Leerdoelen

Hierna kan je:

- meerdere sinusvormige grootheden voorstellen in een vectorendiagram.
- uit een vectorendiagram de wiskundige uitdrukking van de grootheden afleiden.

De figuur waarop we meerdere sinusvormige grootheden met dezelfde frequentie voorstellen door een vector, noemen we een vectorendiagram. Een vectorendiagram stelt de vectoren voor op een bepaald ogenblik. We stellen bij voorkeur één van de vectoren voor als referentiesinus. Aangezien de vectoren draaien met dezelfde hoeksnelheid, stellen de hoeken tussen de vectoren en de referentiesinus hun onderlinge faseverschuivingen voor.

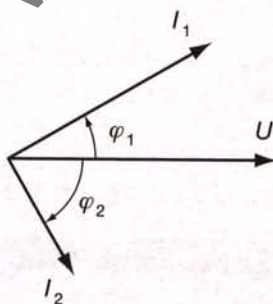


Fig. 2.12 Vectorendiagram op $t = 0$

In het vectorendiagram van figuur 2.12 zijn drie sinusvormige grootheden voorgesteld:

- een spanning U die we als referentiesinus kiezen;
- een eerste stroom I_1 die 30° voorijlt op de spanning;
- een tweede stroom I_2 die 60° najilt op de spanning.

Als de fase uitgedrukt wordt in graden, wordt de wiskundige vergelijking van de grootheden:

$$\begin{aligned} u &= U_m \cdot \sin(\alpha) \\ i_1 &= I_{m1} \cdot \sin(\alpha + 30) \\ i_2 &= I_{m2} \cdot \sin(\alpha - 60) \end{aligned}$$

Als de fase uitgedrukt wordt in radialen, wordt de wiskundige vergelijking van de grootheden:

$$u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i_1 = I_{m1} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$i_2 = I_{m2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

2.4.4 Bijzondere faseverschuivingen

Leerdoelen

Hierna kan je:

- zeggen wanneer sinusvormige grootheden in fase, in kwadratuur of in tegenfase zijn.
- van sinusvormige grootheden die in fase, in kwadratuur of in tegenfase zijn de sinusvormige voorstelling schetsen.
- van sinusvormige grootheden die in fase, in kwadratuur of in tegenfase zijn het vectorendiagram op een tijdstip tekenen en de wiskundige vergelijkingen schrijven.

a In fase

Twee sinusvormige grootheden zijn in fase als ze op dezelfde tijdstippen hun gelijknamige maxima en nulpunten aannemen.

Uit de bepaling volgt dat beide grootheden dezelfde frequentie hebben.

De twee grootheden zijn niet verschoven tegenover elkaar. Ze hebben dezelfde fase; er is geen faseverschuiving. In het vectorendiagram hebben de vectoren dezelfde richting en zin.

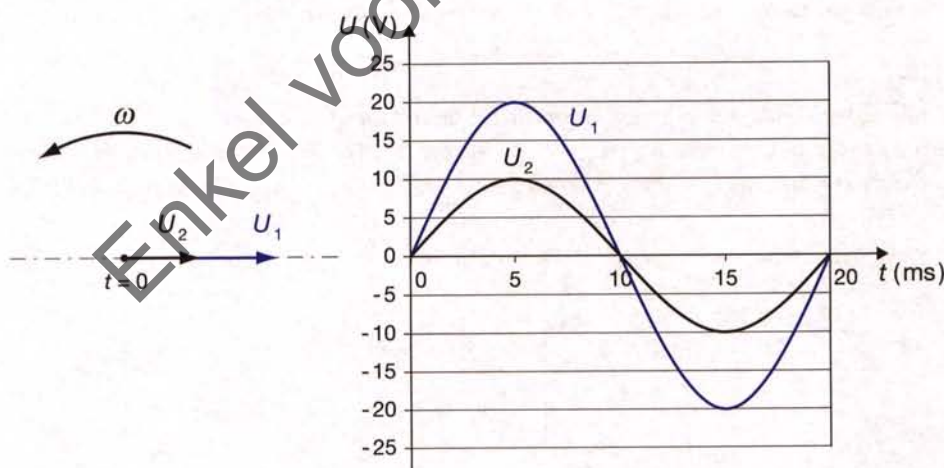


Fig. 2.13 Vectorendiagram en sinusvormige voorstelling van spanningen in fase

De wiskundige vergelijkingen van de spanningen in figuur 2.13:

$$u_1 = U_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_2 = U_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

b In kwadratuur

Twee sinusvormige grootheden zijn in kwadratuur als de maxima van de ene grootheid vallen op de tijdstippen van de nulpunten van de andere grootheid.

Uit de bepaling volgt dat beide grootheden dezelfde frequentie hebben.

De twee grootheden zijn 90° of $\pi/2$ rad tegenover elkaar verschoven. In het vectorendiagram staan de vectoren loodrecht op elkaar.

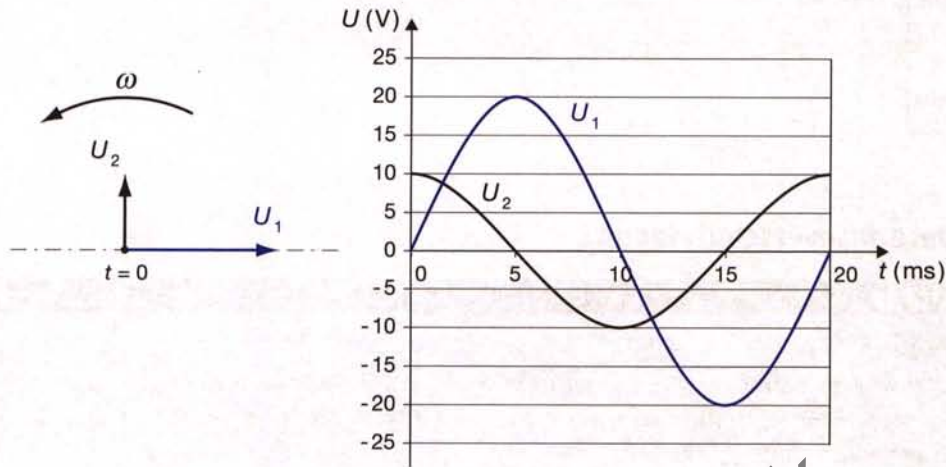


Fig. 2.14 Vectorendiagram en sinusvormige voorstelling van spanningen in kwadratuur

De wiskundige vergelijkingen van de spanningen in figuur 2.14

$$u_1 = U_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_2 = U_{m2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c In tegenfase

Twée sinusvormige grootheden zijn in tegenfase als ze op dezelfde tijdstippen hun tegengestelde maxima en nulpunten aannemen.

Uit de bepaling volgt dat beide grootheden dezelfde frequentie hebben.

De twee grootheden hebben een tegengestelde fase en zijn 180° of π rad tegenover elkaar verschoven. In het vectorendiagram hebben de vectoren dezelfde richting, maar de tegengestelde zin.

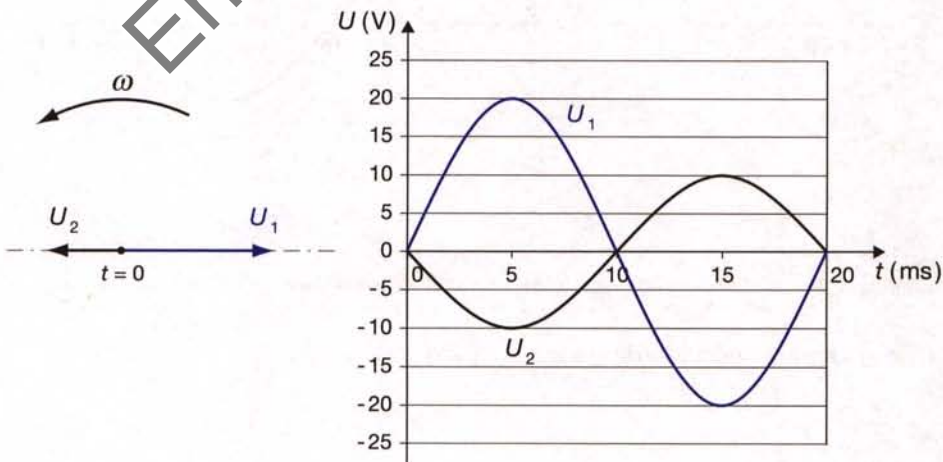


Fig. 2.15 Vectorendiagram en sinusvormige voorstelling van spanningen in tegenfase

De wiskundige vergelijkingen van de spanningen in figuur 2.15:

$$u_1 = U_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_2 = U_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi) = U_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi) = U_{m2} \cdot \sin(-\omega \cdot t)$$

2.5 De complexe rekenwijze

2.5.1 Betekenis van het getal $j = \sqrt{-1}$

Leerdoelen

Hierna kan je:

- aan de hand van een orthogonaal assenstelsel de betekenis van het symbool $j = \sqrt{-1}$ toelichten.
- de reële as van de imaginaire as onderscheiden.
- de wiskundige betekenis verklaren van de machtsverheffing toegepast op het symbool ' j '.

In het cartesiaans (rechthoekig) of orthogonaal assenstelsel van figuur 2.16 nemen we een vector $\overline{oq}$ die samenvalt met de X-as (de reële as genoemd) en die dezelfde positieve zin heeft.

Als we de vector over 90° in tegenwijzerzin draaien (ook de linkse of positieve zin genoemd) dan valt $\overline{oq'}$ samen met de Y-as, die we de imaginaire as noemen. De nieuwe stand van de vector duiden we aan met $j \cdot \overline{oq}$. Deze nieuwe vector heeft dezelfde grootte als $\overline{oq}$. De vector $\overline{oq'} = j \cdot \overline{oq}$ is enkel nog te onderscheiden van de vector $\overline{oq}$ in zijn richting die loodrecht op de vector $\overline{oq}$ staat. Het symbool j heeft hier dus een andere betekenis dan gewoon een vermenigvuldigingsfactor. Een vector vermenigvuldigen met het symbool j stelt een handeling voor. We noemen j een operator-symbool. Een vector vermenigvuldigd met j wijst enkel op het feit dat die vector 90° gedraaid is in de positieve zin tegenover de positieve zin van de reële as.

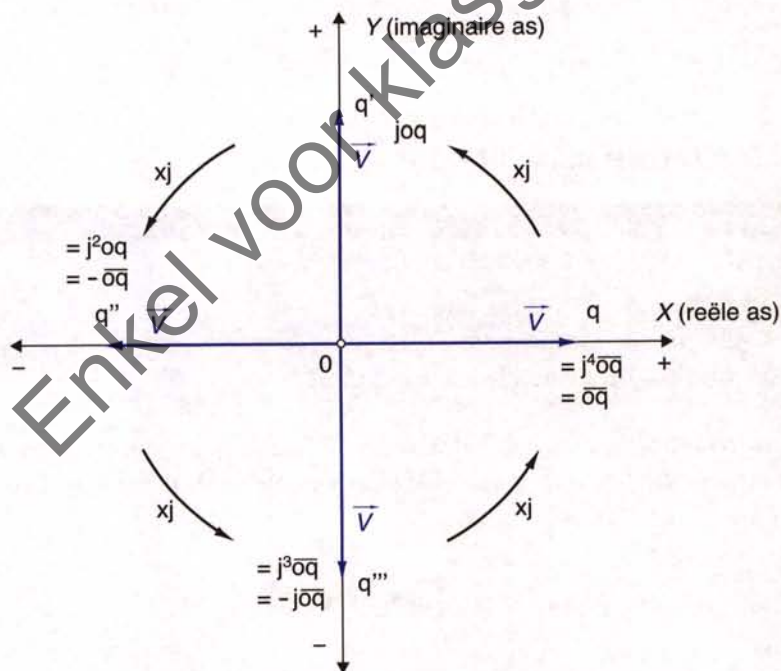


Fig. 2.16 Betekenis van het getal j

Als we de vector $\overline{oq'} = j \cdot \overline{oq}$ nogmaals over 90° in de positieve zin draaien, dan resulteert dit in de vector $\overline{oq''}$.

In de complexe rekenwijze drukken we dit uit door te stellen dat:

$$\overline{oq''} = j \cdot j \cdot \overline{oq} = j^2 \cdot \overline{oq}$$

Ondertussen ligt de vector weer op de reële as en is zijn zin negatief:

$$\overline{oq''} = -\overline{oq}$$

Bijgevolg is $j^2 \cdot \overline{OQ} = -\overline{OQ}$ of $j^2 = -1$

Waaruit:

$$j = \sqrt{-1}$$

Hoewel de worteltrekking uit een negatief getal wiskundig niet kan, zullen we in de complexe rekenwijze toch bewerkingen uitvoeren met die uitdrukking voor j .

Zo is:

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$j^5 = j^4 \cdot j = j$$

enzovoort.

verdraaiing over 90° in de positieve zin

verdraaiing over 180° in de positieve zin

verdraaiing over 270° in de positieve zin

verdraaiing over 360° in de positieve zin

verdraaiing over 450° in de positieve zin

Als we de vector $\overline{OQ''} = j^2 \cdot \overline{OQ}$ nog 90° verder in de positieve zin draaien, dan resulteert dit in vector $\overline{OQ'''} = j \cdot j^2 \cdot \overline{OQ}$.

Aangezien $j^2 = -1$ is $\overline{OQ'''} = -j \cdot \overline{OQ}$.

Die vector ligt ook op de imaginaire as en is tegengesteld aan $j \cdot \overline{OQ}$.

Als we de vector $\overline{OQ'''} = j^3 \cdot \overline{OQ}$ nog 90° verder in de positieve zin draaien, dan resulteert dit in de oorspronkelijke toestand.

Inderdaad:

$$j \cdot j^3 \cdot \overline{OQ} = j^4 \cdot \overline{OQ} = j^2 \cdot j^2 \cdot \overline{OQ} = (-1) \cdot (-1) \cdot \overline{OQ} = +\overline{OQ}$$

2.5.2 Complex getal in cartesiaanse notatie

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het symbool van een complex getal definiëren.
- een complex getal in cartesiaanse notatie herkennen en de samenstellende delen toelichten.
- de begrippen modulus en argument toelichten.

In het cartesiaans (rechthoekig) assenstelsel (figuur 2.17) stellen we een stroomvector $\vec{I}$ voor die een hoek α met de positieve reële as maakt. De componenten van de vector in zijn loodrecht assenstelsel zijn $\vec{I}_a$ en $\vec{I}_b$.

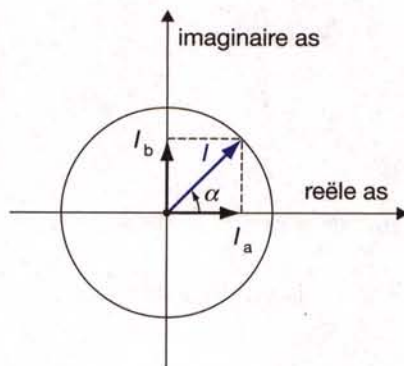


Fig. 2.17 Complexe voorstelling van een stroomvector

Een complex getal dat we aanduiden door een hoofdletter waarboven we een streepje trekken, is altijd samengesteld uit een reëel getal en een imaginair getal.

Complex stellen we de stroomvector als volgt voor:

$$\bar{I} = I_a + j \cdot I_b$$

met

I_a het reële deel van $\bar{I}$

jI_b het imaginaire deel van $\bar{I}$

Voor de verdere wiskundige behandeling stellen we een complex getal in het cartesiaans assenstelsel (figuur 2.18) in het algemeen voor door:

$$\bar{A} = a + jb$$

met

a het reële deel van het complex getal $\bar{A}$

jb het imaginaire deel van het complex getal $\bar{A}$

Het koppel getallen (a,b) noemen we de rechthoekige of cartesische coördinaten van de vector $\bar{A}$. De eerste coördinaat a noemen we soms de abscis en de tweede coördinaat b de ordinaat.

De grootte van de vector in absolute waarde noemen we de modulus A .

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De hoek die de vector met de positieve reële as maakt, noemen we het argument ' α '.

Het argument bepalen we uit de vorm $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

Praktisch is de tangens α de verhouding tussen de tweede en de eerste rechthoekige coördinaat. Hierbij houden we rekening met het teken van beide grootheden.

Het koppel (A,α) is een stel poolcoördinaten van de vector $\bar{A}$ ten opzichte van de pool of oorsprong O en de poolas X .

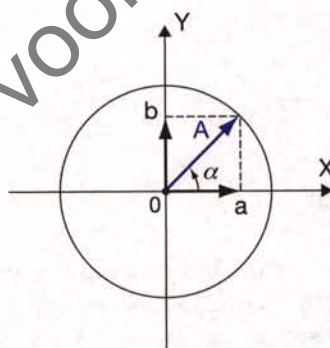


Fig. 2.18 Algemeen gebruikte voorstelling van een complex getal

Toelichtingen

Operatorsymbool j

Waar wij j gebruiken, gebruiken wiskundigen i als operatorsymbool. In de elektriciteit veroorzaakt het operatorsymbool i te veel verwarring met de ogenblikkelijke waarde van een stroom.

Imaginair deel

In het imaginair deel van een complex getal $j \cdot b$ vermenigvuldigen we de ordinaat met de wiskundige operator j . Zoals in elk wiskundig product mogen we het vermenigvuldigingsteken weglaten en schrijven we meestal jb . Een complex getal waarvan het imaginaire deel nul is, noemen we een zuiver reëel getal. Een complex getal waarvan het reële deel nul is, noemen we een zuiver imaginair getal.

Symbool van een complex getal

We stellen een complex getal, ongeacht zijn vorm, voor door een hoofdletter waarboven we een streepje trekken, bv. $\bar{A}$; $\bar{A}_1$ enz.

De modulus van het complexe getal stellen we voor door de hoofdletter die dat complexe getal voorstelt, bv. A ; A_1 enz.

Een pijltje boven een letter verwijst naar een vector, bv. $\vec{A}$; $\vec{A}_1$.

2.5.3 Andere vormen van complexe getallen

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de vier vormen onderscheiden waarin een complex getal kan voorkomen.
- de polaire vorm van een complex getal verduidelijken.
- de overgang van de cartesische vorm naar de polaire vorm toelichten.
- de trigonometrische vorm van een complex getal herkennen.
- het verband tussen de cartesische en de trigonometrische vorm toelichten.
- de exponentiële vorm van een complex getal herkennen.
- het verband tussen de exponentiële en de trigonometrische vorm toelichten.

a Polaire vorm of notatie van Steinmetz

In een poolcoördinatenstelsel kunnen we elk punt in een vlak bepalen aan de hand van een afstand (de modulus) en een hoek (het argument).

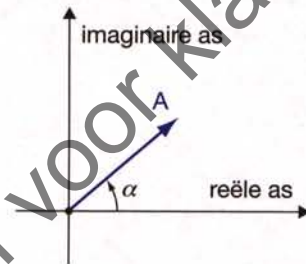


Fig. 2.19 Polaire vorm van een complex getal

We kunnen de plaats van een vector $\vec{A}$ ondubbelzinnig bepalen als zijn hoek t.o.v. de positieve reële as (α) en zijn grootte in absolute waarde (A) gekend zijn (figuur 2.19).

In de polaire vorm, die we ook de notatie van Steinmetz noemen, wordt de uitdrukking van het complexe getal:

$$\bar{A} = A \angle \alpha$$

We lezen $A \angle \alpha$ als volgt: A gedraaid over hoek α .

De hoek wordt vanaf de positieve reële as in tegenwijzerzin genomen (figuur 2.20).

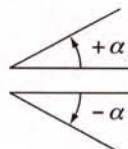


Fig. 2.20 Positieve en negatieve hoek bij de polaire vorm van een complex getal

Als de hoek negatief is, dan moet hij vanaf de positieve reële as in wijzerzin genomen worden.

b Trigonometrische vorm

Figuur 2.21 stelt het verband voor tussen de voorstellingen van een complex getal in het cartesiaanse en het poolcoördinatenstelsel.

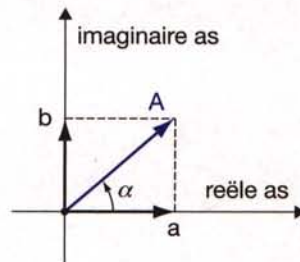


Fig. 2.21 Verband tussen rechthoekige coördinaten en poolcoördinaten

De rechthoekige coördinaten a en b kunnen we schrijven als functie van de poolcoördinaten A en α :

$$a = A \cdot \cos \alpha$$

$$b = A \cdot \sin \alpha$$

De uitdrukking van het complexe getal $\bar{A} = a + jb$ wordt dan:

$$\bar{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$$

De uitdrukking $\bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ noemen we de trigonometrische vorm van een complex getal. In dit geval is $A \cos \alpha$ het reële deel en $jA \sin \alpha$ het imaginaire deel van het complexe getal.

c Exponentiële vorm

Volgens de formule van Euler (wiskunde) is

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

met $e = 2,71828$ het grondtal van de neperiaanse logaritme.

Het complexe getal schrijven we in de exponentiële vorm als:

$$\bar{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = A \cdot e^{j\alpha}.$$

2.5.4 De verschillende vormen van complexe getallen in de vier kwadranten

Leerdoel

Hierna kan je:

- de verschillende vormen van een complex getal schrijven voor elk kwadrant van een cartesiaans assenstelsel.

In figuur 2.22 stellen we in elk kwadrant van een cartesiaans assenstelsel een vector voor. In de cartesiaanse vorm worden de vectoren voorgesteld door de complexe getallen:

$$\bar{A}_1 = 5 + j3$$

$$\bar{A}_2 = -4 + j6$$

$$\bar{A}_3 = -7 - j3$$

$$\bar{A}_4 = 2 - j5$$

Op die manier kan elke willekeurige vector door een complex getal weergegeven worden.

De rechthoekige coördinaten van de eindpunten van de vectoren zijn:

$$\begin{aligned}\text{co}(A_1) &= (5, 3) \\ \text{co}(A_2) &= (-4, 6) \\ \text{co}(A_3) &= (-7, -3) \\ \text{co}(A_4) &= (2, -5)\end{aligned}$$

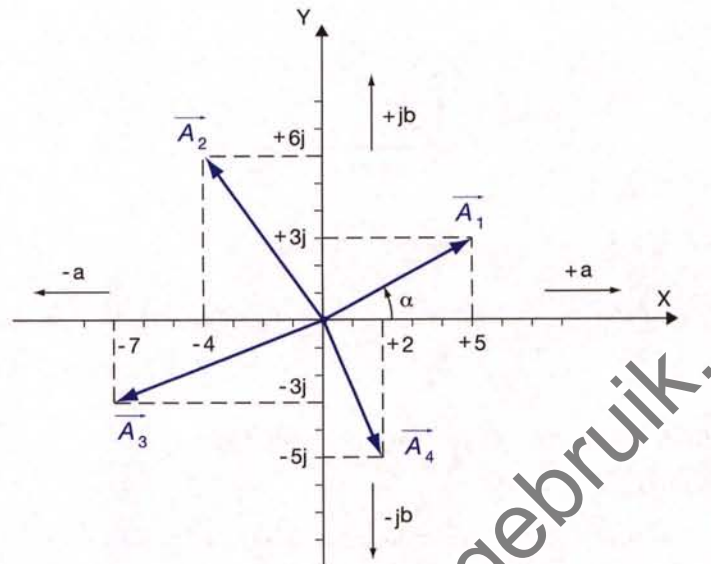


Fig. 2.22 Vectoren voorgesteld in de 4 kwadranten

De overeenkomstige modulussen $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ zijn:

$$A_1 = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 \text{ eenheden}$$

$$A_2 = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7,21 \text{ eenheden}$$

$$A_3 = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7,62 \text{ eenheden}$$

$$A_4 = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,39 \text{ eenheden}$$

De argumenten volgen uit: $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

Voor $\overline{A_1}$ is: $\tan \alpha_1 = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \alpha_1 = 30^\circ 58' \Rightarrow$ Eerste kwadrant

Voor $\overline{A_2}$ is: $\tan \alpha_2 = \frac{6}{-4} = -1,5 \Rightarrow \alpha_2 = -56^\circ 19'$

Omdat de vector $\overline{A_2}$ in het tweede kwadrant ligt, is het argument:

$$\alpha_2 = 180^\circ - 56^\circ 19' = 123^\circ 41'$$

Voor $\overline{A_3}$ is: $\tan \alpha_3 = \frac{-3}{-7} = 0,42857 \Rightarrow \alpha_3 = 23^\circ 12'$

Omdat de vector $\overline{A_3}$ in het derde kwadrant ligt, is het argument:

$$\alpha_3 = 180^\circ + 23^\circ 12' = 203^\circ 12'$$

Voor $\overline{A}_4$ is: $\tan \alpha_4 = \frac{-5}{2} = -2,5 \Rightarrow \alpha_4 = -68^\circ 12'$

Omdat de vector $\overline{A}_4$ in het vierde kwadrant ligt, is het argument:

$$\alpha_4 = 360^\circ - 68^\circ 12' = 291^\circ 48' = -68^\circ 12'$$

Voor de bepaling van het argument moeten we dus rekening houden met het kwadrant waarin de vector ligt. Uit de positieve of negatieve waarde van de eerste of tweede rechthoekige coördinaat kan het kwadrant ondubbelzinnig bepaald worden.

In figuur 2.23 stellen we de vier vectoren van figuur 2.22 voor met hun respectievelijke hoeken en hun poolcoördinaten.

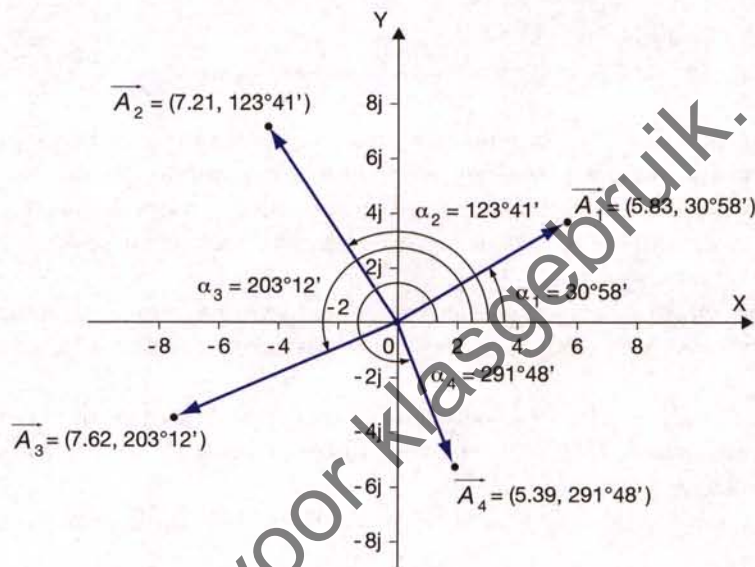


Fig. 2.23 Vectoren voorgesteld in de vier kwadranten met poolcoördinaten

De complexe getallen uit het cartesische assenstelsel kunnen in het poolcoördinatenassenstelsel voorgesteld worden door:

$$\overline{A}_1 = A_1 \angle \alpha_1 \text{ of } 5,83 \angle 30^\circ 58'$$

$$\overline{A}_2 = A_2 \angle \alpha_2 \text{ of } 7,21 \angle 123^\circ 41'$$

$$\overline{A}_3 = A_3 \angle \alpha_3 \text{ of } 7,62 \angle 203^\circ 12'$$

$$\overline{A}_4 = A_4 \angle \alpha_4 \text{ of } 5,39 \angle 291^\circ 48' = 5,39 \angle -68^\circ 12'$$

De complexe getallen worden in de trigonometrische vorm voorgesteld door:

$$\overline{A}_1 = 5,83(\cos 30^\circ 58' + j \sin 30^\circ 58')$$

$$\overline{A}_2 = 7,21(\cos 123^\circ 41' + j \sin 123^\circ 41')$$

$$\overline{A}_3 = 7,62(\cos 203^\circ 12' + j \sin 203^\circ 12')$$

$$\overline{A}_4 = 5,39(\cos 291^\circ 48' + j \sin 291^\circ 48')$$

De complexe getallen worden in de exponentiële vorm voorgesteld door:

$$\overline{A}_1 = 5,83e^{j30^\circ 58'}$$

$$\overline{A}_2 = 7,21e^{j123^\circ 41'}$$

$$\overline{A}_3 = 7,62e^{j203^\circ 12'}$$

$$\overline{A}_4 = 5,39e^{j291^\circ 48'}$$

De poolcoördinaten van het eindpunt van de vectoren zijn

$$\text{poolco}(A_1) = (5,83,30^\circ58')$$

$$\text{poolco}(A_2) = (7,21,123^\circ41')$$

$$\text{poolco}(A_3) = (7,62,203^\circ12')$$

$$\text{poolco}(A_4) = (5,39,291^\circ48')$$

2.6 Onderscheiden waarden van een sinusvormige spanning of stroom

2.6.1 Amplitude of maximale waarde

Leerdoelen

Hierna kan je:

- het begrip amplitude toelichten.
- het verband tussen de amplitude en de oscillatiewijdte aantonen.

De ogenblikkelijke waarde van een spanning u (stroom i) is de waarde op een gegeven tijdstip. De grootste ogenblikkelijke waarde die in een periode van een spanning (stroom) voorkomt noemen we de maximale waarde U_m (I_m). Een sinusvormige spanning (stroom) bereikt in het tijdsverloop van een periode tweemaal de maximale waarde: eenmaal maximaal positief $+U_m$ ($+I_m$) en de tweede maal maximaal negatief $-U_m$ ($-I_m$).

Bij een periodieke grootheid waarbij het positieve en het negatieve maximum in het spanning-tijd-diagram symmetrisch liggen tegenover de tijdsas, noemen we de maximale waarde ook de amplitude of amplitudo.

De waarde tussen $+U_m$ ($+I_m$) en $-U_m$ ($-I_m$) noemen we de (totale) oscillatiewijdte, de top-tot-top-waarde U_{t-t} of ook de piek-tot-piek-waarde U_{pp} . Voor een sinusvormige grootheid is de oscillatiewijdte gelijk aan het dubbele van de amplitude.

Figuur 2.24 toont een ogenblikkelijke waarde, de amplitude en de oscillatiewijdte van een sinusvormige stroom.

De maximale waarde en de oscillatiewijdte bepalen we meestal uit een oscilloscoopbeeld van de spanning.

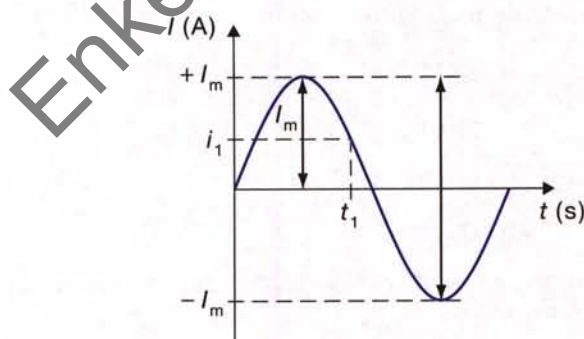


Fig. 2.24 Verband tussen maximale waarde en oscillatiewijdte van een wisselstroom

2.6.2 Gemiddelde waarde

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de gemiddelde waarde van een sinusvormige spanning (stroom) bepalen.
- het praktische nut van de gemiddelde waarde verduidelijken.

Gedurende een periode is de gemiddelde waarde van de sinusvormige spanning (stroom) gelijk aan nul.

Om de gemiddelde stroomsterkte te vinden, bestuderen we een alternantie. In de andere alternantie is de gemiddelde waarde identiek, enkel de stroomzin is anders. Omdat de positieve alternantie uit twee symmetrische helften bestaat (figuur 2.25), namelijk van 0° tot 90° en van 90° tot 180° , volstaat het de gemiddelde waarde te berekenen voor een vierde deel van de periode (figuur 2.24).

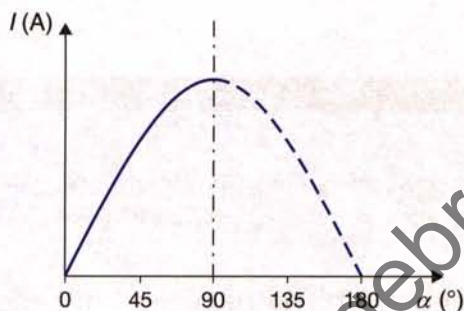


Fig. 2.25 Symmetrie van de positieve alternantie

Als we in figuur 2.25 de eerste helft van de positieve alternantie verdelen in 9 gelijke delen ($n = 9$) en we bepalen de ogenblikkelijke waarde in het midden van elk deel, dan bekomen we de resultaten van tabel 2.2.

α ($^\circ$)	5	15	25	35	45	55	65	75	85
i_i	0,08716	0,25882	0,42262	0,57358	0,70711	0,81915	0,90631	0,96593	0,99619
	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$	$\times I_m$

Tabel 2.2 Gemiddelde waarde berekenen van een sinusvormige stroom

De som van de momentele waarden is $\sum i_i = 5,73687 \times I_m$.

Met $n = 9$ wordt de gemiddelde waarde dan:

$$I_{\text{gem}} = \frac{\sum i_i}{n} = \frac{5,73687 \times I_m}{9} = 0,63743 \cdot I_m$$

Als we de beschouwde intervallen kleiner nemen, zal het resultaat nauwkeuriger worden. Het juiste resultaat bekomen we door een wiskundige integraalberekening:

$$I_{\text{gem}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t) = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,6366 \dots \times I_m$$

De gemiddelde waarde van een sinusvormige spanning of stroom berekend over een alternantie is ongeveer 64 % van de amplitude.

De gemiddelde waarde van een sinusvormige spanning of stroom kunnen we meten met een universele meter op meetstand DC.

De gemiddelde waarde van een wisselstroom gebruiken we enkel voor het bepalen van de verplaatste hoeveelheid elektriciteit bij het laden van accumulatoren.

De gemiddelde waarde van een sinusvormige wisselspanning is belangrijk bij gelijkrichting van de wisselspanning. Als we de uitgangsspanning van een gelijkrichter zonder afvlakking meten met een meettoestel op meetstand DC, dan toont het meettoestel de gemiddelde waarde I_{gem} . Een gelijkrichter met afvlakking zal vanzelfsprekend een hogere waarde voor de gemiddelde waarde meten.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond de gemiddelde waarde van een sinusvormige spanning na gelijkrichting.

2.6.3 Effectieve waarde

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de effectieve waarde van een sinusvormige spanning (stroom) bepalen.
- het praktische nut van de effectieve waarde verduidelijken.

In leereenheid 1 hebben we aangetoond dat de effectieve waarde van een wisselspanning (-stroom) gelijk is aan de wortel uit het kwadratisch gemiddelde van de ogenblikkelijke waarden. De effectieve waarde bepalen we over een volledige periode. Bij een sinusvormige wisselspanning (-stroom) zijn de ogenblikkelijke waarden in de positieve en in de negatieve alternatie op het teken na gelijk. Bij het bepalen van de effectieve waarde heeft het teken van de ogenblikkelijke waarde geen invloed omdat het kwadraat van de waarden, dat altijd positief is, gesommeerd wordt. Omdat elke alternantie uit twee symmetrische helften bestaat, volstaat het de effectieve waarde te berekenen voor een vierde deel van de periode (figuur 2.24).

Als we in figuur 2.25 de eerste helft van de positieve alternantie verdelen in 9 gelijke delen ($n = 9$), de ogenblikkelijke waarde in het midden van elk deel bepalen en het kwadraat van elke ogenblikkelijke waarde berekenen, dan bekomen we de resultaten van tabel 2.3.

α (°)	5	15	25	35	45	55	65	75	85
i_i	0,08716 $\times I_m$	0,25882 $\times I_m$	0,42262 $\times I_m$	0,57358 $\times I_m$	0,70711 $\times I_m$	0,81915 $\times I_m$	0,90631 $\times I_m$	0,96593 $\times I_m$	0,99619 $\times I_m$
$(i_i)^2$	0,00760 $\times I_m^2$	0,06699 $\times I_m^2$	0,17861 $\times I_m^2$	0,32899 $\times I_m^2$	0,50000 $\times I_m^2$	0,67101 $\times I_m^2$	0,82140 $\times I_m^2$	0,93302 $\times I_m^2$	0,99239 $\times I_m^2$

Tabel 2.3 Effectieve waarde berekenen van een sinusvormige stroom

De som van de kwadraten van de momentele waarden is $\sum (i_i)^2 = 4,50001 \times I_m^2$. Met $n = 9$ wordt de effectieve waarde dan:

$$I = \sqrt{\frac{\sum (i_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{4,50001 \times I_m^2}{9}} = \sqrt{0,50000 \times I_m^2} = 0,70711 \cdot I_m$$

Als we de beschouwde intervallen kleiner nemen, zal het resultaat nauwkeuriger worden. Het juiste resultaat bekomen we door een wiskundige integraalberekening:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (I_m \cdot \sin(\omega \cdot t))^2 \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \dots \times I_m$$

De effectieve waarde van een sinusvormige spanning of stroom is ongeveer 70 % van de amplitude.

De effectieve waarde van een sinusvormige spanning of stroom kunnen we meten met een universele meter op meetstand AC.

Een wisselspanning of -stroom wordt altijd aangegeven met zijn effectieve waarde. Het is een waarde die in werkelijkheid niet bestaat, maar de berekeningen vergemakkelijkt.

Als we zeggen: de netspanning bedraagt 230 V, dan bedoelen we eigenlijk dat de effectieve waarde van de netspanning 230 V is.

Toelichting

Gemeten waarden in vectorendiagram

Opdat de projectie van een vector op de verticale as gelijk zou zijn aan de ogenblikkelijke waarde van de grootte, nemen we de amplitude als grootte van de vector. In de praktijk gaan we vaak de effectieve waarden gebruiken om het vectorendiagram te tekenen, de waarden die we gemeten hebben met een universele meter op meetstand AC. We tekenen de vectoren dan eigenlijk op een schaal van ongeveer 70 %. Dat heeft geen invloed op de onderlinge verschuiving tussen de vectoren. Als we nieuwe vectoren construeren in het vectorendiagram, dan moeten we er wel rekening mee houden dat hun grootte gelijk is aan de effectieve waarde.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond het effect van een sinusvormige spanning en een constante gelijkspanning.

2.6.4 Topfactor en vormfactor

Leerdoelen

Hierna kan je:

- de begrippen top- en vormfactor definiëren.
- de top- en vormfactor berekenen voor een sinusvormige spanning of stroom.
- het praktische gebruik van de top- en vormfactor toelichten.

De topfactor is het getal dat de verhouding aangeeft tussen de maximale waarde en de effectieve waarde van een wisselgrootte.

Toegepast op een sinusvormige stroom krijgen we:

$$\text{De topfactor } f_t = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{I_m / \sqrt{2}} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41$$

De amplitude van een sinusvormige spanning of stroom is ongeveer 40 % groter dan de effectieve waarde.

Als de netspanning 230 V bedraagt, dan is de maximale waarde van de netspanning:

$$U_m = 1,41 \cdot U = 1,41 \cdot 230 = 324 \text{ V.}$$

De vormfactor is het getal dat de verhouding aangeeft tussen de effectieve waarde en de gemiddelde waarde van een wisselgrootte.

Toegepast op een sinusvormige stroom krijgen we:

$$\text{De vormfactor } f_v = \frac{I}{I_{\text{gem}}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} \cdot I_m} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

We gaan er steeds vanuit dat een sinusvormige spanning werkelijk het verloop vertoont van de wiskundige sinusfunctie. Sinusvormige spanningen zijn in de praktijk vaak vervormd, zodat ze meer lijken op bijvoorbeeld een trapeziumvormige spanning. Als we de effectieve waarde van de sinusvormige spanning meten en we meten ook de gemiddelde waarde van de spanning na gelijkrichting, dan kunnen we uit de twee meetresultaten de vormfactor bepalen. Als we als resultaat 1,11 bekomen, dan zijn we zeker dat de sinusvormige spanning slechts weinig vervormd is.

Toelichting

Effectieve waarde bij eenvoudige universele meters

In eenvoudige universele meters wordt de effectieve waarde van een wisselspanning als volgt bekomen. Eerst wordt de wisselspanning op de klemmen van het meettoestel gelijkgericht. De gemiddelde waarde van de gelijkgerichte spanning wordt met 11 % verhoogd en die waarde wordt uiteindelijk op het display getoond. Dit betekent dat het meettoestel slechts een behoorlijke nauwkeurigheid heeft als de te meten spanning zuiver sinusvormig is.

2.7 Fourieranalyse

Leerdoelen

Hierna kan je:

- omschrijven wat een Fourieranalyse is.
- de begrippen nulcomponent, grondgolf en harmonische duiden.
- een frequentiespectrum interpreteren.

In een mathematisch concept stelt de Franse wiskundige Fourier dat een willekeurige functie ontbonden kan worden in een eindige of oneindige som factoren van de vorm:

$$y = f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t \dots$$

De reeks factoren is de som van:

- een constante term A_0 , de nulterm of nulcomponent die praktisch de gemiddelde waarde van de functie voorstelt. De periode van de gemiddelde waarde is oneindig groot want ze verandert nooit, zodat $f = 0$;
- een sinus- en/of cosinusfunctie met dezelfde frequentie als de te ontbinden functie, de grondgolf of de fundamentele golf die een bepaalde amplitude en faseverschuiving t.o.v. de referentiesinus kan hebben;
- een aantal sinus- en/of cosinusfuncties, waarvan de frequentie een geheel veelvoud is van de frequentie van de grondgolf, de harmonischen. Zo noemen we de harmonische waarvan de frequentie het dubbele is van de frequentie van de grondgolf de tweede harmonische. Elke harmonische heeft zijn eigen amplitude en kan een faseverschuiving t.o.v. de referentiesinus hebben.

Welke termen voorkomen in de reeks wordt vooral bepaald door de symmetrieën die de golf vertoont.

De symmetrische, blokvormige gelijkspanning van figuur 1.9 voldoet volgens de Fourieranalyse aan de formule:

$$u = \frac{U_m}{2} + \frac{2}{\pi} U_m \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right]$$

De ogenblikkelijke waarden van elke term en de som ervan op elk ogenblik kunnen we vrij eenvoudig berekenen met behulp van een rekenblad op de computer.

De resultaten van de berekeningen per 0,1 ms zijn voor de gemiddelde waarde, de grondgolf, de 3de, de 5de en de 7de harmonische en de som tot en met de 13de harmonische weergegeven in figuur 2.26.

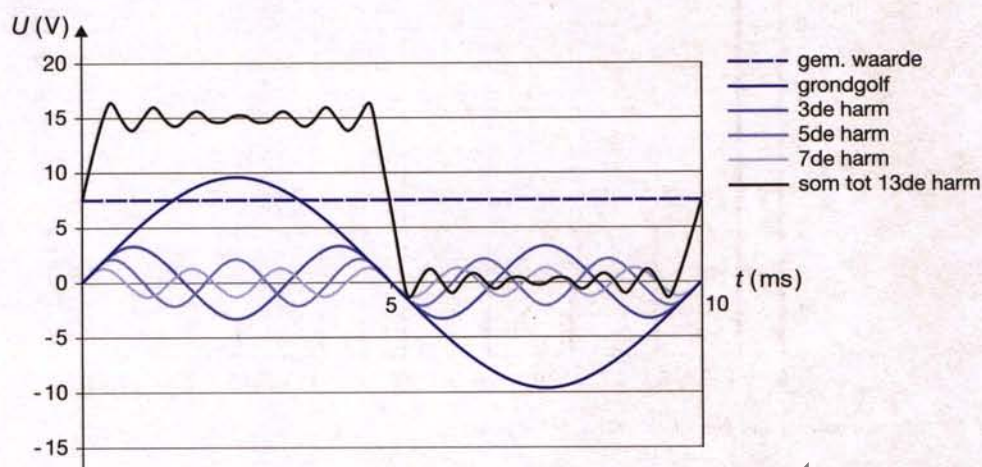


Fig. 2.26 Fourieranalyse van een symmetrische, blokvormige gelijkspanning

Na het sommeren tot en met de 13de harmonische wordt de vorm van de blok golf ongeveer duidelijk. Naarmate we meer harmonischen in rekening brengen zal het resultaat de rechthoekige vorm beter benaderen.

In een frequentiespectrum stellen we de relatieve amplitude van elke term voor in functie van de frequentie. De amplitude van de grondgolf U_{m1} stellen we gelijk aan 1 (100 %) en de andere waarden drukken we uit in procenten van de amplitude van de grondgolf. De relatieve amplitudes van de Fourieranalyse van figuur 2.26 berekenen we in tabel 2.4. Het frequentiespectrum stellen we voor in figuur 2.27. Het frequentiespectrum kan opgenomen worden met een frequentieanalyser.

U_{mi}	U_{mi} (V)	$U_{mi}/U_{m1} \times 100$ (%)
$U_{gem} = U_{m0}$	$0,5 U_m = 7,50$ V	78,5
U_{m1}	$2/\pi U_m = 9,55$ V	100,0
U_{m3}	$1/3 \cdot (2/\pi U_m) = 3,18$ V	33,3
U_{m5}	$1/5 \cdot (2/\pi U_m) = 1,91$ V	20,0
U_{m7}	$1/7 \cdot (2/\pi U_m) = 1,36$ V	14,1
U_{m9}	$1/9 \cdot (2/\pi U_m) = 1,06$ V	11,1
U_{m11}	$1/11 \cdot (2/\pi U_m) = 0,87$ V	9,11
U_{m13}	$1/13 \cdot (2/\pi U_m) = 0,73$ V	7,64

Tabel 2.4 Berekenen van de relatieve amplitudes in een frequentiespectrum

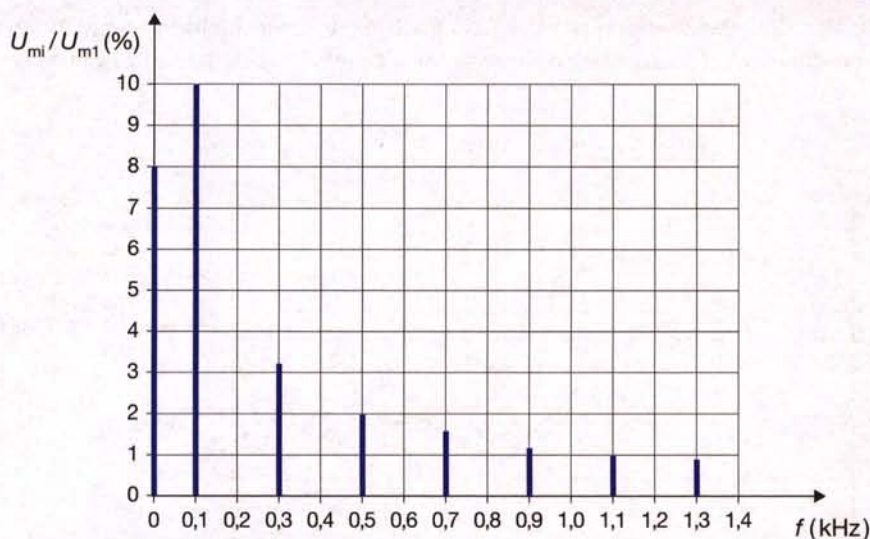


Fig. 2.27 Frequentiespectrum van een blokvormige gelijkspanning

Toelichting

Tijdsdomein en frequentiedomein

Tot nog toe hebben we spanning voorgesteld als functie van de tijd $u = f(t)$. Naast de studie in het tijdsdomein worden spanningen vaak voorgesteld in functie van de frequentie $U = f(f)$ of in het frequentiedomein. Een constante gelijkspanning heeft altijd dezelfde waarde, zodat de periode T oneindig lang is en de frequentie $f = 1/T$ dus nul is. Het frequentiegebied loopt in principe tot in het oneindige.



In het labboek vind je mogelijke opdrachten en demonstraties rond de Fourieranalyse, het afregelen van een meetprobe en het produceren van een audiosignaal.

2.8 De voor- en nadelen van wisselstroom

Leerdoel

Hierna kan je:

– de voor- en nadelen van het gebruik van wisselstroom opsommen en toelichten.

- In vergelijking met gelijkstroomgeneratoren kunnen wisselstroomgeneratoren rechtstreeks hogere spanningen genereren.
- De wisselspanningen kunnen met heel weinig energieverlies door een transformator naar hogere of lagere waarden getransformeerd worden. Voor het energietransport is dit een uiterst belangrijke factor. Hoe hoger de spanning, hoe kleiner de stroomsterkte en hoe economischer de aan te leggen leiding.
- Wisselstroomgeneratoren en -motoren zijn eenvoudiger (goedkoper) van constructie en vragen minder onderhoud dan gelijkstroomgeneratoren en -motoren.
- In de magnetische kringen van wisselstroomgeneratoren treden hysteresis- en wervelstroomverliezen op. Dit is in veel gevallen (generatoren, motoren, transformatoren enz.) nadelig. In andere toepassingen wordt dit verschijnsel als voordelig ervaren (bv. inductieve verwarming in kookhaarden en smeltkroezen enz.).
- De isolatie van wisselstroomleidingen moet kunnen weerstaan aan de amplitudewaarde van de spanning.
- In veel toepassingen kunnen we de gelijkstroom niet wegdenken: opslaan van elektrische energie, elektrolyse enz. In die gevallen zijn gelijkspanningsbronnen (scheikundige batterijen en

generatoren) noodzakelijk. Door de evolutie van de gelijkrichtingstechniek kunnen we de wisselspanningsbron veelal behouden omdat ze omgebouwd kan worden voor het leveren van gelijkspanning.

Toelichtingen

Meten van de frequentie

De meeste universele meettoestellen beschikken over een schakelstand voor het meten van de frequentie. De frequentiemeter schakel je zoals de voltmeter. Je moet wel rekening houden met de maximum toegelaten spanning. Een tongenfrequentiemeter die werkt op het resonantieverschijnsel heeft meestal een meetbereik tot 100 Hz en is vooral van toepassing in de elektrische energieverdeling.

Elektromagnetische golven

Elektromagnetische golven zijn periodiek veranderlijke elektrische en magnetische veldsterkten die zich voortplanting in de ruimte. Elektrische en magnetische veldsterkten kunnen in een trillingsbron (LC-kring) niet afzonderlijk bestaan, ze horen samen en worden elektromagnetische trillingen genoemd. We kunnen de elektromagnetische trillingen vergelijken met de beweging (trillingen) van de waterdeeltjes die zich golfvormig uitbreiden op een wateroppervlak. Tot de elektromagnetische golven behoren radio- en radargolven, warmtestralen, licht, infrarode en ultraviolette stralen, röntgenstralen, gammastralen en kosmische stralen: *deze soorten stralen verschillen onderling in frequentie en golflengte*. De grootte van de golflengte bepaalt de interpretatie die we aan elektromagnetische golven geven. Het hele gebied van elektromagnetische golven heet het spectrum van de elektromagnetische golven. In stoffelijke milieus hangt de voortplantingssnelheid ook nog af van de frequentie van de trilling. In een vacuüm is de voortplantingssnelheid van een elektromagnetische golf (dus ook van licht) een universele constante, nl. $300 \cdot 10^6$ m/s. In andere media is de lichtsnelheid lager dan in een vacuüm.

Zoals voor trillingsverschijnselen mogen we voor elektromagnetische golven stellen dat de voortplantingssnelheid (v) gelijk is aan de frequentie (f) vermenigvuldigd met de golflengte λ , of:

$$v = f \cdot \lambda$$

- f frequentie in /s, s^{-1} of Hz
 v voortplantingssnelheid in m/s (voor licht 300 000 km/s)
 λ golflengte in m, d.i. de afstand waarover de trillingen zich gedurende één periode (T) uitbreiden (figuur 2.28):

$$\lambda = v / f$$

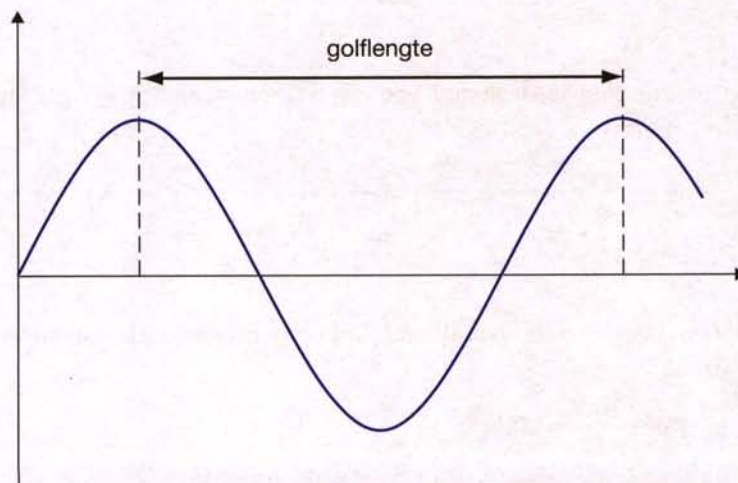


Fig. 2.28 Golflengte van een elektromagnetische trilling

2.9 Voorbeelden

- 1 Een draadraam met 100 windingen beweegt in een magnetisch veld met een magnetische inductie van 1,5 T. De omtreksnelheid is 4 m/s en de lengte van de geleiders die veldlijnen snijden is 50 cm. Bereken de maximale waarde van de sinusvormige spanning die in het draadraam gegenereerd wordt.

Gegeven: $l = 50 \text{ cm} = 0,50 \text{ m}$
 $N = 100$
 $B = 1,5 \text{ T}$
 $v = 4 \text{ m/s}$

Gevraagd: E_m

Oplossing: Over elke geleider van het draadraam ontstaat op elk ogenblik een spanning
 $e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha$
 Elke winding bestaat uit 2 geleiders en in alle windingen wordt dezelfde momentele spanning opgewekt.
 De momentele waarde van de totale spanning $e = 2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha$
 De spanning over het draadraam is maximaal als de geleiders de veldlijnen loodrecht snijden, $\alpha = 90^\circ$ of $\sin\alpha = 1$.
 $E_m = 2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot v = 2 \cdot 100 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 1 = 600 \text{ V}$

- 2 Bereken de periode en de pulsatie van een sinusvormige wisselstroom met een frequentie van 2 kHz.

Gegeven: $f = 2 \text{ kHz} = 2000 \text{ Hz}$

Gevraagd: T en ω

Oplossing: $T = 1/f = 1/2000 = 0,0005 \text{ s} = 0,5 \text{ ms} = 500 \mu\text{s}$
 $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2000 = 12,57 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

- 3 Na een tijd van $1/8$ periode is de momentele waarde van een sinusvormige wisselspanning (referentiesinus) 80 V. Bereken de effectieve waarde van de spanning.

Gegeven: Op $t = T/8$ is $u = 80 \text{ V}$ bij een referentiesinus

Gevraagd: U

Oplossing: De wiskundige uitdrukking van de referentiesinus $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Daaruit volgt:

$$U_m = \frac{u}{\sin(\omega \cdot t)} = \frac{u}{\sin \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t} = \frac{80}{\sin \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{8}} = \frac{80}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{80}{0,707} = 113,2 \text{ V}$$

Bij een sinusvormige grootheid is het verband tussen de effectieve en de maximale waarde:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{113,2}{1,41} = 80,0 \text{ V}$$

- 4 Hoe groot is de frequentie van een sinusvormige wisselstroom als er in 50 ms 4 cyclussen doorlopen worden?

Gegeven: $t = 50 \text{ ms}$
Aantal cyclussen: 4

Gevraagd: f

Oplossing: De duur van een cyclus (periode):
 $T = 50/4 = 12,50 \text{ ms}$
 $f = 1/T = 1/0,0125 = 80 \text{ s}^{-1} = 80 \text{ Hz}$

- 5 Een voltmeter in stand AC meet 120,0 V. Bereken de amplitudo, de effectieve waarde en de gemiddelde waarde van die sinusvormige wisselspanning.

Gegeven: uitslag V-meter: 120,0 V

Gevraagd: U_m ; U en U_{gem}

Oplossing: De voltmeter duidt de effectieve waarde $U = 120,0 \text{ V}$ van de wisselspanning aan.
De maximale waarde $U_m = 1,41 \cdot U = 169,2 \text{ V}$
De gemiddelde waarde U_{gem} van de wisselspanning is nul.

- 6 Een sinusvormige wisselstroom ijlt $T/6 \text{ s}$ voor op een sinusvormige wisselspanning. Bereken het faseverschil in seconden, graden en radialen als de frequentie 100 Hz is.

Gegeven: I ijlt $T/6 \text{ s}$ voor op U
 $f = 100 \text{ s}^{-1}$

Gevraagd: faseverschil in seconden, graden en radialen

Oplossing: $T = 1/f = 1/100 = 0,01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$
faseverschil in seconden $T/6 = 10/6 = 1,667 \text{ ms}$,
in graden: $360/6 = 60^\circ$
en in radialen: $2\pi/6 = 1,047 \text{ rad}$

- 7 Teken in een assenstelsel de vectoriële voorstelling op het ogenblik $t = 0$ van de volgende sinusvormige spanningen en stromen: I_1 is een referentiesinus, U_2 ijlt 30° na op I_1 , I_3 is in tegenfase met I_1 , U_1 is in fase met I_3 en I_2 ijlt $\pi/2 \text{ rad}$ voor op U_1 .

Gegeven: $t = 0$
 I_1 referentiegrootheid
 U_2 ijlt 30° na op I_1
 I_3 in tegenfase met I_1
 U_1 in fase met I_3
 I_2 ijlt $\pi/2 \text{ rad}$ voor op U_1

Gevraagd: teken het vectorendiagram

Oplossing:

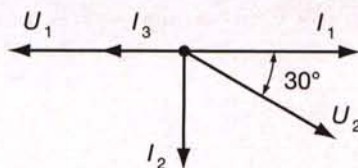


Fig. 2.29 Vectorendiagram bij voorbeeld 7

- 8 Een sinusvormige stroom met een effectieve waarde van 20 A ijlt 45° na op een sinusvormige spanning met een effectieve waarde van 100 V. Noteer de wiskundige uitdrukking van de stroom en de spanning met de fase in graden.

Gegeven: I ijlt na op U
 $I = 20 \text{ A}$
 $\varphi = 45^\circ$
 $U = 100 \text{ V}$

Gevraagd: wiskundige uitdrukking van spanning en stroom

Oplossing: $I_m = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot 20 = 28,3 \text{ A}$
 $U_m = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 100 = 141,4 \text{ V}$
 $u = U_m \cdot \sin(\alpha) = 141,4 \cdot \sin(\alpha)$
 $i = I_m \cdot \sin(\alpha - \varphi) = 28,3 \cdot \sin(\alpha - 45^\circ)$

- 9 Een sinusvormige stroom met een amplitude van 25 A ijlt 40° na op een sinusvormige spanning (referentiesinus) met een amplitude van 150 V. Bereken de momentele waarde van de stroomsterkte op het ogenblik dat de spanning de eerste maal haar positief maximum bereikt. Stel de oplossing vectorieel voor.

Gegeven: I ijlt 40° na op U
 $I_m = 25 \text{ A}$
 $U_m = 150 \text{ V}$

Gevraagd: i als u de eerste maal gelijk is aan +150 V

Oplossing: De wiskundige uitdrukking van de spanning $u = U_m \cdot \sin\left(\frac{360^\circ \cdot t}{T}\right)$

De spanning bereikt de eerste maal haar positief maximum op $t = T/4$

$$u = U_m \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = U_m \cdot \sin(90^\circ) = U_m = 150 \text{ V}$$

De wiskundige uitdrukking van de stroom $i = I_m \cdot \sin\left(\frac{360^\circ \cdot t}{T} - 40^\circ\right)$

De ogenblikkelijke waarde van de stroomsterkte op $t = T/4$

$$i = I_m \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{T} \cdot \frac{T}{4} - 40^\circ\right) = I_m \cdot \sin(90^\circ - 40^\circ) = 25 \cdot \sin(50^\circ) = 19,15 \text{ A}$$

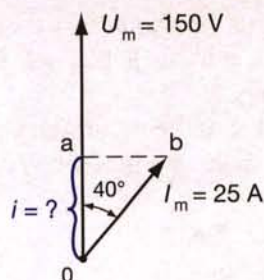


Fig. 2.30 Vectorendiagram bij voorbeeld 9

Uit figuur 2.30 blijkt dat we de ogenblikkelijke waarde van de stroomsterkte ook kunnen bepalen als de projectie van de stroomvector op de verticale as.

Uit de driehoek oab volgt:

$$oa = i = I_m \cdot \cos(40^\circ) = 19,15 \text{ A}$$

- 10 Stel de spanning $\bar{U} = 17 + j0$ en de stroom $\bar{I} = 11,44 - j8,31$ voor in een rechthoekig assenstelsel.

Oplossing:

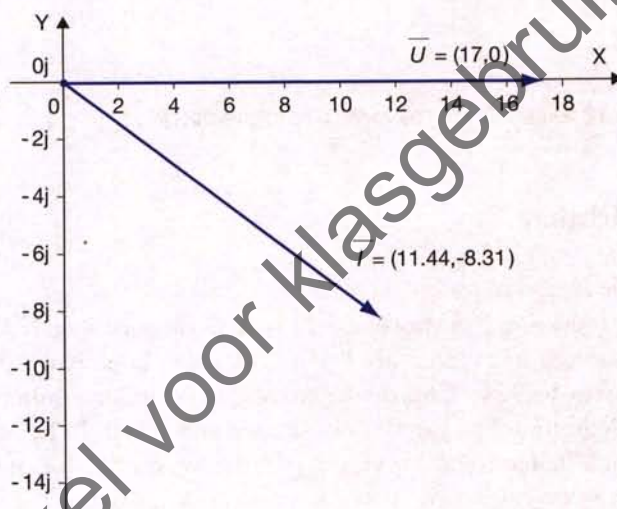


Fig. 2.31 Voorstelling in rechthoekige coördinaten bij voorbeeld 10

- 11 Bereken de poolcoördinaten van de complexe getallen $\bar{U}$ en $\bar{I}$ uit voorbeeld 10

Oplossing: Om in overeenstemming te zijn met de vectoriële voorstelling nemen we aan dat de lengte van de vector (de modulus van het complex getal) gelijk is aan de maximale waarde van de sinusvormige grootheid. De hoek die de vector met de positieve reële as maakt (het argument van het complex getal) is de faseverschuiving φ tussen de sinusvormige grootheid en een referentiesinus.

Het complex getal dat de spanning voorstelt $\bar{U}$ heeft enkel een reëel deel. De modulus is dan gelijk aan het reële deel $U_m = 17 \text{ V}$. Het argument is nul $\varphi_U = 0$. De poolcoördinaat van de spanning is dan $(17, 0^\circ)$.

De modulus van het complex getal dat de stroom I_1 voorstelt is:

$$I_m = \sqrt{11,44^2 + (-8,31)^2} = 14,14 \text{ A}$$

Het argument van het complexe getal dat de stroom voorstelt, bepalen we uit

$$\tan(\varphi_1) = \frac{-8,31}{11,44} = -0,726 \text{ zodat } \varphi_1 = \tan^{-1}(-0,726) = -36^\circ.$$

De verschuiving beschouwen we normaal over de kleinste hoek. De stroom ijlt 36° na op de spanning. Je kan ook zeggen dat de stroom $360 - 36 = 324^\circ$ voorijlt op de spanning.

De poolcoördinaat die de stroom voorstelt is dan $(14,14,-36^\circ)$ of $(14,14,324^\circ)$.

De oplossing stellen we grafisch voor in figuur 2.32.

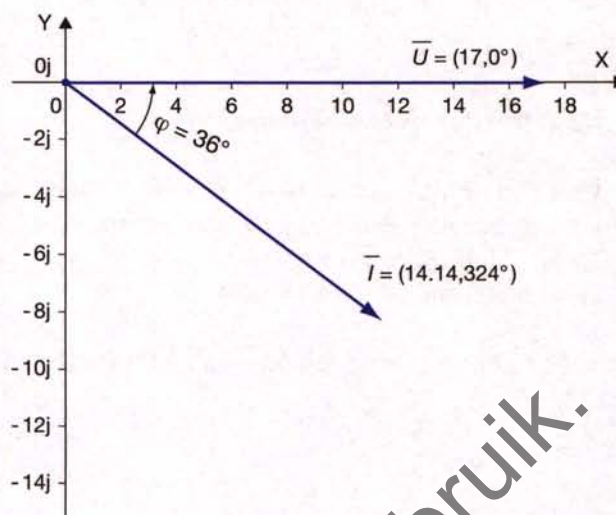


Fig. 2.32 Voorstelling in poolcoördinaten bij voorbeeld 11

Toelichting

Komma in coördinaten

In de oplossing van voorbeeld 11 is de poolcoördinaat $(14,14,324^\circ)$ dubbelzinnig. We kunnen hem lezen als 14,14 onder een hoek van 324° of als 14 onder een hoek van $14,324^\circ$. Om de verwarring te vermijden, kunnen we een puntkomma als scheidingsteken van de coördinaten gebruiken. In Engelstalige literatuur en op rekentoestellen treedt de verwarring niet op omdat er een decimaal punt gebruikt wordt in de getallen i.p.v. een komma (zoals in figuur 2.32).

- 12 Schrijf de complexe grootheden $\bar{U}$ en $\bar{I}$ van voorbeeld 10 in de polaire vorm, de trigonometrische vorm en de exponentiële vorm.

Oplossing: de polaire vorm: $\bar{U} = 17 \angle 0^\circ$ en $\bar{I} = 14,14 \angle -36^\circ$

de trigonometrische vorm $\bar{U} = 17(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 17(1 + j0) = 17$ en

$\bar{I} = 14,14(\cos(-36^\circ) + j \sin(-36^\circ))$

de exponentiële vorm $\bar{U} = 17e^{-j0^\circ} = 17$ en $\bar{I} = 14,14e^{-j36^\circ}$

- 13 Schrijf de wiskundige uitdrukking van de ogenblikkelijke waarden van de spanning en de stroom van voorbeeld 10 met de fase in graden en radialen als de frequentie 50 Hz is.

Oplossing: de periode is $T = 1/f = 1/50 = 0,020 \text{ s} = 20 \text{ ms}$

met fase in graden $u = U_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = 17 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0,020} \cdot t\right) = 17 \cdot \sin(314 \cdot t)$ en

$i = I_m \cdot \sin\left(\frac{360 \cdot t}{T} - 36\right) = 14,14 \cdot \sin\left(\frac{360}{0,020} \cdot t - 36\right) = 14,14 \cdot \sin(18 \cdot 10^3 \cdot t - 36)$

met de fase in radialen $u = U_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) = 17 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0,020} \cdot t\right) = 17 \cdot \sin(314 \cdot t)$ en

$$i = I_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} - \frac{\pi}{5}\right) = 14,14 \cdot \sin\left(\frac{6,28}{0,020} \cdot t - \frac{3,14}{5}\right) = 14,14 \cdot \sin(314 \cdot t - 0,628)$$

14 Teken 1 cyclus van de spanning en de stroom van voorbeeld 13 in een spanning(stroom)-tijd-diagram aan de hand van de ogenblikkelijke waarden die je invult in tabel 2.5.

t (ms)	0	2	4	5	6	7	8	10	12	14	15	16	17	18	20
u_i (V)															
i_i (A)															

Tabel 2.5 Waarden bij voorbeeld 14

Oplossing: Als je de resultaten van tabel 2.5 berekent met behulp van een tabel in een rekenblad op je pc of op je grafisch rekentoestel, kan je automatisch een voorstelling zoals figuur 2.33 genereren.

t (ms)	0	2	4	5	6	7	8	10
u_i (V)	0	10,00	16,16	17,00	16,16	13,76	10,00	0
i_i (A)	-8,31	0	8,31	11,44	13,45	14,14	13,45	8,31
t (ms)	12	14	15	16	17	18	20	
u_i (V)	-10,00	-16,16	-17,00	-16,16	-13,76	-10,00	0	
i_i (A)	0	-8,31	-11,44	-13,45	-14,14	-13,45	-8,31	

Tabel 2.6 Aangevulde tabel 2.5

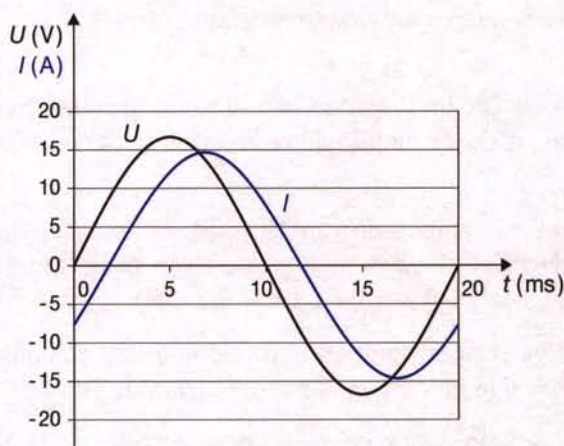


Fig. 2.33 Spanning(stroom)-tijd-diagram van voorbeeld 14

2.10 Opdrachten

- 1 In een uniform veld van $1,2 \text{ Wb/m}^2$ beweegt een geleider van 6 cm lengte die een hoek van 30° vormt met de veldrichting. De bewegingssnelheid is 8 m/s.
Hoe groot is de gegenereerde spanning?
- 2 Een raam draait in wijzerzin in een uniform magnetisch veld. De maximaal omvatte flux $\phi_m = 0,04 \text{ Wb}$, terwijl de maximaal gegenereerde spanning 10 V is. Bereken de spanning en de flux die het raam omvat voor de tijdstippen die in de tabel 2.7 weergegeven zijn. Op het tijdstip nul staat het vlak van de winding loodrecht op de veldlijnen.
Druk in de kolommen α ($^\circ$) en α (rad) respectievelijk de beschreven hoek in graden en radialen uit.

α ($^\circ$)	α (rad)	t (s)	e (V)	ϕ (Wb)	α ($^\circ$)	α (rad)	t (s)	e (V)	ϕ (Wb)
		0					$7T/12$		
		$T/12$					$2T/3$		
		$T/6$					$3T/4$		
		$T/4$					$5T/6$		
		$T/3$					$11T/12$		
		$5T/12$					T		
		$T/2$							

Tabel 2.7 Waarden bij opdracht 2

- 3 Zet de resultaten van opdracht 2 uit in een assenstelsel $E = f(t)$ en $\phi = f(t)$.
- 4 Een sinusvormige wisselspanning heeft na $1/12$ periode een waarde van 150 V. Hoe groot zijn de amplitudo, de vormfactor, de effectieve waarde en de gemiddelde waarde over een alternantie van deze spanning?
- 5 Een wisselstroom heeft een cirkelfrequentie van 376,8 rad/s. Bereken de frequentie en de periode.
- 6 We beschouwen twee sinusvormige wisselspanningen met frequenties 60 en 150 Hz. Bereken de tijd die nodig is om de amplitudo te bereiken nadat de momentele waarde van de spanning nul was.
- 7 Een stroom met een amplitudo van 10 A ijlt 30° voor op een spanning met een amplitudo van 100 V. Teken het sinusvormige verloop van beide grootheden. Teken ook de vectoriële voorstelling. (Schaal: 1 A = 1 mm; 1 V = 0,2 mm).
- 8 Een sinusvormige stroom wordt voorgesteld door het complex getal $\bar{I} = 18,37 + j10,61$. Geef de rechthoekige en de poolcoördinaten van de vector.
- 9 De vector die een sinusvormige spanning voorstelt, heeft als poolcoördinaten $(566, 120^\circ)$. Stel de vector voor als complex getal in de polaire vorm, in de trigonometrische vorm en in de exponentiële vorm.

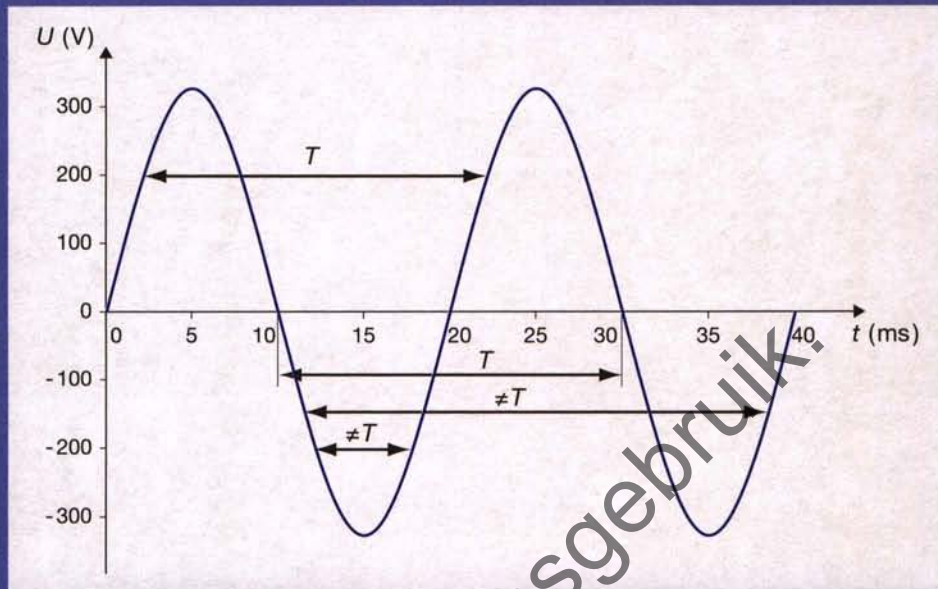


Op de cd-rom vind je een diagnostische toets en extra taken.

SYNTHESE

De sinusvormige wisselspanning

Een sinusvormige wisselspanning kan eenvoudig opgewekt worden door een raam rond zijn as te laten draaien in een uniform magnetisch veld.



Een sinusvormige wisselspanning (-stroom) wordt gekenmerkt door zijn fase, uitgedrukt in graden of radialen en zijn periode of frequentie.

De frequentie $f = 1/T$ wordt uitgedrukt in s^{-1} of Hz.

Wiskundige uitdrukking van een sinusvormige spanning:

$$u = U_m \cdot \sin(\alpha) \quad \text{of} \quad u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Bij **meerdere spanningen en/of stromen** in een assenstelsel, vertrekken we altijd vanuit een **referentiesinus**; het is een sinusvormige spanning of stroom die op $t = 0$ nul is en daarna stijgt. De andere sinusvormige grootheden worden dan in overeenstemming met de referentiesinus wiskundig uitgedrukt als volgt:

$$u = U_m \cdot \sin(\alpha \pm \varphi) \quad \text{of} \quad u = U_m \cdot \sin(\omega t \pm \varphi)$$

waarin

u de ogenblikkelijke waarde (V)

U_m de maximale waarde, amplitude of amplitudo (V), die de helft is van de oscillatiewijdte, top-tot-top-waarde of piek-tot-piek-waarde

$(\alpha \pm \varphi)$ of $\omega \cdot t \pm \varphi$ de fase (graden of rad)

waarin

φ de faseverschuiving of het faseverschil (graden of rad)
Als $\varphi = 0$ is het een referentiesinus of een spanning die in fase is met de referentiesinus.

Als φ positief is ijlt de spanning voor op een referentiesinus.

Als φ negatief is ijlt de spanning na op een referentiesinus.

ω de pulsatie, de cirkelfrequentie of elektrische hoeksnelheid (rad/s)

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

α of t de hoek of het tijdstip waarop we de spanning beschouwen (graden of s)

Als we de fase en de faseverschuiving uitdrukken in graden wordt de wiskundige uitdrukking:

$$u = U_m \cdot \sin\left(\frac{360}{T} \cdot t + \varphi\right)$$

De **gemiddelde waarde** over een alternantie van een sinusvormige wisselspanning is:

$$U_{\text{gem}} = \frac{2}{\pi} \cdot U_m = 0,636 \cdot U_m$$

De gemiddelde waarde zullen we praktisch alleen gebruiken voor het berekenen van de hoeveelheid elektriciteit.

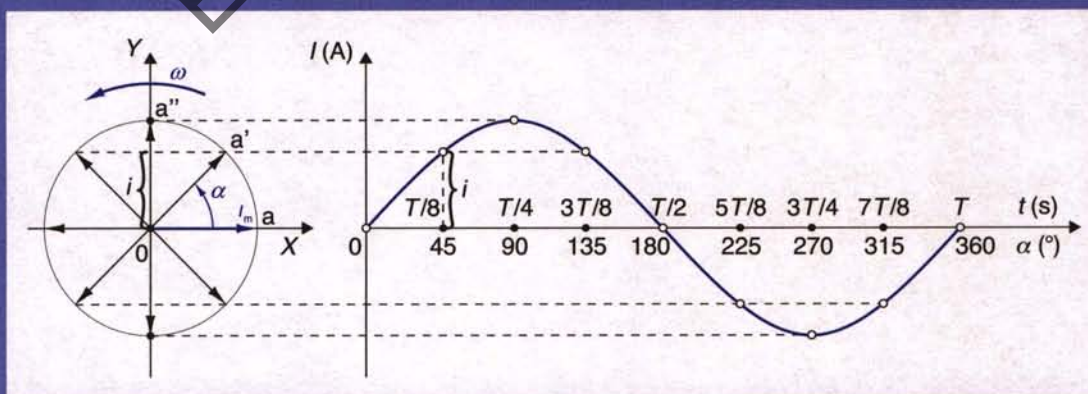
De **effectieve waarde** van een sinusvormige wisselspanning is:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m$$

We gebruiken altijd de effectieve waarde om de waarde van een wisselspanning aan te geven.

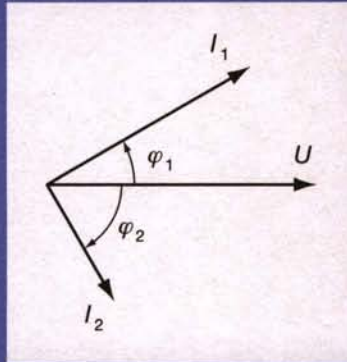
Vectoriële voorstelling van een sinusvormige grootheid

Een sinusvormige spanning (stroom) kunnen we voorstellen door een draaiende **vector**:



De vector grijpt aan in de oorsprong (0) van het vlak, heeft een lengte gelijk aan I_m en draait met constante hoeksnelheid ω in tegenwijzerzin, vertrekkend vanaf de referentiestand, zijnde horizontaal en naar rechts gericht.

De figuur waarop we meerdere sinusvormige grootheden voorstellen met dezelfde frequentie noemen we een **vectorendiagram**.



In een vectorendiagram is de projectie van het uiteinde van een amplitudevector op de verticale as gelijk aan de ogenblikkelijke waarde.

Complexe voorstelling van een sinusvormige grootheid

Een sinusvormige grootheid kunnen we eveneens voorstellen door een **complex getal**:

- In de cartesische vorm $\vec{A} = a + jb$ met:
 - a het reële deel
 - jb het imaginaire deel, waarin $j = \sqrt{-1}$
 Het koppel (a, b) noemen we de rechthoekige coördinaten van de vector $\vec{A}$.
 De grootte van de vector in absolute waarde noemen we de modulus $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 De hoek die de vector met de positieve reële as maakt noemen we het argument α .

Het koppel (A, α) noemen we de poolcoördinaten van de vector $\vec{A}$.

- In de polaire vorm $\vec{A} = A \angle \alpha$
- In de trigonometrische vorm $\vec{A} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha)$
- In de exponentiële vorm $\vec{A} = A \cdot e^{j\alpha}$

Enkel voor klasgebruik.